Журнал Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003, № 3, с. 94.

Символьное решение дифференциальных уравнений

Вопрос. Как в Mathcad решать дифференциальные уравнения в символьном виде с помощью преобразования Лапласа. Как можно подробнее, пожалуйста (prohar@tut.by).

Ответ. Вопрос большой, поэтому отвечу кратко. Для понимания того, что изложено ниже, надо знать преобразование Лапласа и основы теории линейных динамических систем (теории регулирования, например).

Вам известно понятие передаточной функции $W(p)$? Это отношение изображения по Лапласу $y(p)$ – выхода динамического звена, которое описывается дифференциальным уравнением, к изображению по Лапласу $u(p)$ – входного сигнала при нулевых начальных условиях. Таким образом, $y(p) = W(p)*u(p)$. Эта запись при дробно-рациональной передаточной функции соответствует линейному дифференциальному уравнению (ДУ), порядок которого равен порядку полинома ее знаменателя. В другом варианте это ДУ n-го порядка может быть представлено в виде системы n дифференциальных уравнений первого порядка.

Пусть имеем ДУ вида: $y''(t) + b1\cdot y'(t) + b2\cdot y(t) = a1\cdot u'(t) + a2\cdot u(t)$

с начальными условиями при t0=0 $\quad y'(0) = 0 \quad y(0) = 0 \quad u(0) = 0$

Пусть входным сигналом служит единичный скачок, т.е. u(t) = 1 при t > 0.

Этому уравнению соответствует операторная форма вида: y(p)=W(p)*u(p), где p - оператор Лапласа, причем

$$W(p) := \frac{a1\cdot p + a2}{p^2 + b1\cdot p + b2} \qquad u(p) := \frac{1}{p}$$

Пусть $\quad a1 := 1 \quad a2 := 0.5 \quad b1 := 0.5 \quad b2 := 2.5$

Таким образом, вводим операторное выражение для переменной y:

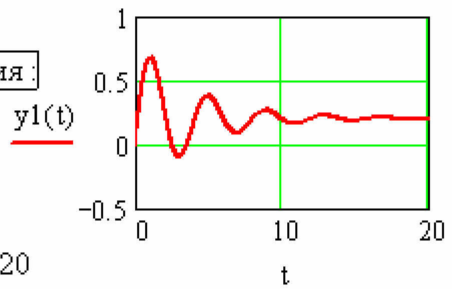
$$y(p) := \frac{p + 0.5}{\left(p^2 + 0.5\cdot p + 2.5\right)\cdot p}$$

Получаем оригинал y(t) обратным преобразованием Лапласа

$$y(p) \; \begin{vmatrix} \text{invlaplace}, p \\ \text{float}, 2 \end{vmatrix} \rightarrow .20 - .20\cdot e^{(-.25)\cdot t}\cdot\cos(1.6\cdot t) + .61\cdot e^{(-.25)\cdot t}\cdot\sin(1.6\cdot t)$$

Обозначаем $\quad y1(t) := .20 - .20\cdot \exp(-.25\cdot t)\cdot\cos(1.6\cdot t) + .61\cdot\exp(-.25\cdot t)\cdot\sin(1.6\cdot t)$

и строим график полученного решения



Проверка установившегося значения :

Теоретическое значение:

$$\lim_{p \to 0} (p\cdot y(p)) \text{ float}, 2 \rightarrow .20$$

Полученное значение: $\quad y1(\infty) \rightarrow .20$

Рис. 9. Символьное решение в среде MathCAD Pro

Для получения символьного решения по первому варианту следует:

1. По заданному ДУ записывать передаточную функцию $W(p)$;
2. Задать изображение по Лапласу входного сигнала $u(t)$;

3. Ввести операторное выражение для $y(p)$ в форме $y(p) := W(p)*u(p)$;

4. Использовать символьный оператор invlaplace для получения оригинала $y(p)$, т.е. для получения решения $y(t)$;

5. Построить график. Определяется значения $y(t)$ для заданных значений t.

Ответ на заданный вопрос сопровождался mcd-файлом, в котором было получено символьное решение ДУ второго порядка без задания числовых значений коэффициентов и с заданием последних. Объем файла не позволяет привести его полностью. Поэтому ограничимся здесь вариантом символьного решения ДУ с заданными значениями коэффициентов (рис. 9).

Аналогичным путем может быть получено символьное решения уравнения с коэффициентами в виде символов. Надстрочное обозначение производных в ДУ (см. начало рис 9) вводится в MathCAD Pro клавишами **Ctrl + F7**.

Учет ненулевых начальных условий при символьном решении линейных ДУ удобно осуществлять с использованием второго варианта – формированием системы n дифференциальных уравнений первого порядка и изображения по Лапласу матричной экспоненты. Этот способ заслуживает отдельного рассмотрения.