

## Построение моделей динамических объектов по входным и выходным сигналам

Ивановский Ростислав Игоревич, профессор, д. т. н., , СПбГПУ,

Настоящий материал служит продолжением темы, затронутой в [1] и посвященной анализу подходов, которые могут быть использованы при обработке информации по результатам измерительных экспериментов. В работе [1] рассматривались постановки, в большей части базирующиеся на применении поисковых алгоритмов обработки данных, полученных путем фиксации значений так называемых «выходных» переменных исследуемых систем. В этот класс задач органически входит и проблема аппроксимации переходных характеристик динамических объектов различного назначения. Применительно к системам различных типов такая постановка означает, что полученные в результате натурных измерений данные представляются (или действительно служат) реакцией динамического объекта на единичное ступенчатое воздействие и математическое описание данных ищется в виде дифференциального уравнения (или системы уравнений в форме Коши). Задачи аппроксимации переходных характеристик легко распространяются на варианты масштабированных ступенчатых воздействий ( $k$ -ступенчатых сигналов при  $k \neq 1$ ), однако, при достаточно большой общности, рассматривают все же частный случай стандартного воздействия одного вида.

В общем случае в качестве исходных данных могут выступать входные и выходные переменные (сигналы) исследуемого объекта, образующие двумерный массив исходных данных. При наличии такой исходной информации о свойствах объекта, построение его математической модели также может быть осуществлено с применением поисковых алгоритмов. Однако в рамках приведенного ниже материала остановимся на описании регулярного (беспоискового) алгоритма и соответствующей методики получения параметров динамических объектов по двумерным массивам данных о входных и выходных сигналах объекта на основе взаимно обратных преобразований и регуляризации процесса вычислений.

Удобство практического применения беспоисковых алгоритмов и сравнительная простота их программной реализации хорошо известны. Весьма полный анализ свойств соответствующих беспоисковых процедур содержится в работе [2]. Как правило, беспоисковые алгоритмы идентификации опираются на аппарат линейной алгебры, а в детерминированной постановке задач – на метод наименьших квадратов в форме обобщенного обращения матриц или в рекуррентной форме. Близкий по типу обширный класс задач стохастической идентификации использует для решения методы оптимальной фильтрации и алгоритмы фильтров Калмана-Бьюси и их субоптимальные модификации. Эти алгоритмы структурно аналогичны алгоритмам метода наименьших квадратов в рекуррентной форме.

Класс задач построения моделей динамических систем и их звеньев с использованием беспоисковых алгоритмов весьма широк. Поэтому остановимся лишь на одной из задач этого класса – определении параметров линейных динамических объектов; сформируем беспоисковую вычислительную процедуру и проанализируем ее свойства, опираясь на работы [3, 4, 5].

Рассматриваемая проблема построения математической модели динамического объекта по измеренным входным воздействиям и реакциям на них встречается весьма часто. По этой исходной информации обычно требуется найти параметры модели объекта, заданной в одной из нескольких взаимосвязанных форм: в виде передаточной функции, системы дифференциальных уравнений, разностных уравнений или  $z$ -передаточной функции. При этом, как показано ниже, для решения задачи необходимо осуществлять переход от одной из форм в любую другую. Если процедуры перехода от непрерывных форм моделей к разностным (или дискретным) достаточно хорошо известны, то обратный переход

нетривиален. Совокупность процедур прямого и обратного перехода рассматривается ниже [4] и названа автором взаимно обратными преобразованиями.

Анализ показывает, что оценка параметров разностных уравнений или z-передаточной функции динамического звена составляет лишь часть проблемы определения параметров передаточной функции или системы дифференциальных уравнений. Поэтому рассмотрим задачу определения параметров передаточной функции  $W(p)$  как наиболее общую. Решение этой задачи потребует некоторого теоретического обоснования, которое приводится ниже с иллюстрациями в среде MathCAD 2001 Pro.

## 1. Взаимно обратные преобразования

Назовем взаимно обратными преобразованиями последовательность преобразований по переходу от непрерывной модели исследуемого объекта к дискретной модели и наоборот. Эти преобразования служат основой решения рассматриваемой задачи и кратко описываются ниже. Для определенности и без ущерба общности рассмотрения будем считать, что передаточная функция  $W(p)$  является правильной (степень полинома числителя меньше степени полинома знаменателя) и соответствует устойчивой системе, т.е.  $W(\infty) = 0$ ,  $W(0) = h(\infty)$ . Здесь  $h(\infty)$  – установившееся значение переходной характеристики системы с передаточной функцией  $W(p)$ .

Системы рассматриваемого типа описываются дифференциальными уравнениями в форме Коши:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}u; \quad y = \mathbf{H}\mathbf{x}; \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.1)$$

где:  $\mathbf{x}$  –  $(n \times 1)$ -вектор состояний системы,  $\mathbf{A}$  –  $(n \times n)$ -матрица динамики системы;  $u, y$  – скалярные входное воздействие и реакция системы;  $\mathbf{B}, \mathbf{H}$  –  $n$ -мерные вектор-столбец и вектор-строка коэффициентов соответственно,  $\mathbf{x}(0)$  – начальное состояние системы.

В общем случае неоднозначная проблема получения систем дифференциальных уравнений вида (1.1), не имеющих производных входного сигнала в правых частях, для правильных передаточных функций  $n$ -го порядка является нетривиальной [3, 4].

Назовем реализацией совокупность матриц  $\mathbf{R} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H})$  системы (1.1). Одна из множества таких реализаций, а именно  $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \mathbf{H}_1)$ , представляет для рассматриваемой задачи определения параметров первоочередной интерес. Приведем основные соотношения, справедливые для реализации  $\mathbf{R}_1$ , для чего представим правильную передаточную функцию  $W(p)$   $n$ -го порядка, соответствующую уравнениям (1.1), в виде:

$$W(p) = S_I(p) / p^n + Q_I(p) = S_{II}(p) / p^n + Q_{II}(p); \quad (1.2)$$

$$S_I(p) = \mathbf{a}_I^T \mathbf{P}_I; \quad S_{II}(p) = \mathbf{a}_{II}^T \mathbf{P}_{II}; \quad Q_I(p) = \mathbf{b}_I^T \mathbf{P}_I; \quad Q_{II}(p) = \mathbf{b}_{II}^T \mathbf{P}_{II};$$

где:  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$  –  $(n \times 1)$ -векторы, включающие параметры полиномов числителя и знаменателя  $W(p)$ ;  $\mathbf{P}$  –  $(n \times 1)$ -вектор, содержащий степени оператора Лапласа. Эти векторы имеют вид:

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_I^T &= | a_n \ a_{n-1} \dots \ a_2 \ a_1 |; & \mathbf{b}_I^T &= | b_n \ b_{n-1} \dots \ b_2 \ b_1 |; \\ \mathbf{a}_{II}^T &= | a_1 \ a_2 \dots \ a_{n-1} \ a_n |; & \mathbf{b}_{II}^T &= | b_1 \ b_2 \dots \ b_{n-1} \ b_n |; \\ \mathbf{P}_I^T &= | p^{n-1} \ p^{n-2} \dots \ p \ 1 |; & \mathbf{P}_{II}^T &= | 1 \ p \dots \ p^{n-2} \ p^{n-1} |. \end{aligned}$$

Назовем реализацией  $\mathbf{R}_1$  совокупность матриц следующей структуры:

$$\mathbf{A}_1 = \begin{vmatrix} \Theta & \mathbf{E}_{n-1} \\ \dots & \dots \\ -\mathbf{b}_{II}^T & \end{vmatrix}; \quad \mathbf{B}_1 = \mathbf{C}^{-1} \mathbf{a}_I; \quad \mathbf{H}_1 = | 1 \ 0 \ 0 \dots \ 0 |. \quad (1.3)$$

Здесь обозначено:  $\Theta$  –  $[(n-1) \times 1]$  – нулевой вектор;  $\mathbf{E}_{n-1}$  – единичная матрица порядка  $(n-1)$ ;  $\mathbf{C}$  –  $(n \times n)$  – нижняя треугольная матрица вида:

$$C = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ b_n & 1 & & & 0 \\ b_{n-1} & b_n & 1 & & \\ b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ b_2 & b_3 & \dots & b_{n-1} & b_n & 1 \end{vmatrix}. \quad (1.4)$$

Нетрудно убедиться, что реализация  $\mathbf{R}_1$  удовлетворяет передаточной функции (1.2):

$$W(p) = \mathbf{H1}[p\mathbf{E}_n - \mathbf{A1}]^{-1}\mathbf{B1} = \mathbf{H1} \cdot [p \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot \mathbf{A1}]^{-1} \mathbf{a}_1. \quad (1.5)$$

Из структуры матрицы  $\mathbf{A1}$  следует, что она будет неособенной при  $b_1 \neq 0$ , т.е. при отсутствии в передаточной функции чисто интегрирующих составляющих. В дальнейшем будем предполагать  $b_1 \neq 0$ , имея в виду, что распространение полученных ниже результатов на случаи  $b_1 = 0$ ,  $b_1 = b_2 = 0$  и т.д. не вызовет затруднений.

Обратим внимание на то, что структура матрицы  $\mathbf{A1}$  реализации  $\mathbf{R}_1$  имеет предельно сжатую (компактную) форму. Действительно, при общем числе элементов этой матрицы, равном  $n^2$ , она имеет всего  $n$  параметров, подлежащих определению. Этот факт позволяет выбрать подобные структуры матриц динамики системы, а, следовательно, и реализации типа  $\mathbf{R}_1$ , в качестве основных в рассматриваемой задаче. Общее число неизвестных параметров (векторы  $\mathbf{a}$  и  $\mathbf{b}$ ) в реализациях типа  $\mathbf{R}_1$  составляет  $2n$ .

В работе [4] получен ряд свойств реализации  $\mathbf{R}_1$ , которые позволяют резко упростить задачу определения параметров. Приведем здесь эти свойства без доказательств.

**Свойство 1.** Матрица наблюдаемости  $\mathbf{N1}$  реализации  $\mathbf{R}_1$  является единичной:

$$\mathbf{N1} = | (\mathbf{H1})^T (\mathbf{H1} \cdot \mathbf{A1})^T \dots (\mathbf{H1} \cdot \mathbf{A1}^{n-1})^T |^T = \mathbf{E}. \quad (1.6)$$

**Свойство 2.** Реализация  $\mathbf{R}_1 = (\mathbf{A1}, \mathbf{B1}, \mathbf{H1})$  образуется из любой другой полностью наблюдаемой реализации  $\mathbf{R} = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H})$  изменением базиса пространства состояний с помощью матрицы наблюдаемости  $\mathbf{N}$  реализации  $\mathbf{R}$ .

Можно показать, что полученная (в результате такого преобразования подобия) новая система имеет матрицы реализации  $\mathbf{R}_1$ , т.е.

$$\mathbf{A1} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{N}^{-1}; \quad \mathbf{B1} = \mathbf{N} \cdot \mathbf{B}; \quad \mathbf{H1} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{N}^{-1}. \quad (1.7)$$

Таким образом, согласно свойству 2, реализация, полученная из  $\mathbf{R}$  преобразованием подобия с использованием собственной матрицы наблюдаемости, является реализацией  $\mathbf{R}_1$ . Описанные свойства иллюстрируются на рис. 1 и 2.

На рис. 1 с помощью символьных преобразований MathCAD Pro составлены матрицы реализации  $\mathbf{R}_1$  для звена третьего порядка. С использованием выражений (1.2) – (1.5) символьными преобразованиями восстанавливается передаточная функция и определяется матрица наблюдаемости  $\mathbf{N}$ , которая равна единичной матрице. Следует обратить внимание на использование расширенной формы встроенной функции **stack** при нахождении матрицы наблюдаемости. В этой функции использовано три аргумента, которые соответствуют матрицам, последовательно присоединяемым друг к другу снизу. Передаточная функция (см. рис. 1) обозначена как  $V(p)$ . Это объясняется тем, что символ  $W$  в данном случае неприемлем ввиду его использования системой MathCAD Pro для обозначения одной из специальных встроенных функций – функции Ламберта. Совпадение обозначений с именами встроенных функций недопустимо по понятным причинам и препятствует нормальному ходу процесса вычислений.

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -b_1 & -b_2 & -b_3 \end{pmatrix} & \mathbf{a} &:= \begin{pmatrix} a_3 \\ a_2 \\ a_1 \end{pmatrix} & \mathbf{b} &:= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{pmatrix} \\
 C &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ b_3 & 1 & 0 \\ b_2 & b_3 & 1 \end{pmatrix} & P2 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ p \\ p^2 \end{pmatrix} & P1 &:= \begin{pmatrix} 2 \\ p \\ 1 \end{pmatrix} \\
 H &:= (1 \ 0 \ 0) \\
 V(p) &:= \frac{\mathbf{a}^T \cdot P1}{p^3 + \mathbf{b}^T \cdot P2} & V(p) &\rightarrow \frac{a_3 p^2 + a_2 p + a_1}{p^3 + b_1 + b_2 p + b_3 p^2} \\
 H \cdot (p \cdot C - C \cdot A)^{-1} \cdot \mathbf{a} & \text{simplify} & \rightarrow & \\
 N &:= \text{stack}(H, H \cdot A, H \cdot A^2) & N &\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

Рис. 1. Иллюстрация свойства 1 реализации  $\mathbf{R}_1$

$$\begin{aligned}
 A &:= \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} & B &:= \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} & H &:= (h_1 \ h_2) & \text{Исходная} \\
 & & & & & & \text{реализация } R \\
 N &:= \text{stack}(H, H \cdot A) & N &\rightarrow \begin{pmatrix} h_1 & h_2 \\ h_1 \cdot a_1 + h_2 \cdot a_3 & h_1 \cdot a_2 + h_2 \cdot a_4 \end{pmatrix} & \text{Матрица} \\
 & & & & & & \text{наблюдаемости} \\
 & & & & & & \text{реализации } R \\
 A1 &:= (N \cdot A \cdot N^{-1}) & B1 &:= N \cdot B & H1 &:= H \cdot N^{-1} \\
 A1 & \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ a_2 \cdot a_3 - a_1 \cdot a_4 & a_1 + a_4 \end{pmatrix} & H1 & \text{simplify} \rightarrow (1 \ 0) \\
 B1 &\rightarrow \begin{bmatrix} h_1 \cdot b_1 + h_2 \cdot b_2 \\ (h_1 \cdot a_1 + h_2 \cdot a_3) \cdot b_1 + (h_1 \cdot a_2 + h_2 \cdot a_4) \cdot b_2 \end{bmatrix} & \text{Матрицы} \\
 & & & & & & A1, B1, H1 \\
 & & & & & & \text{реализации } R1 \\
 N1 &:= \text{stack}(H1, H1 \cdot A1) & N1 & \text{simplify} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} & \text{Матрица} \\
 & & & & & & \text{наблюдаемости} \\
 & & & & & & \text{реализации } R1
 \end{aligned}$$

Рис.2. Получение реализации  $\mathbf{R}_1$  из  $\mathbf{R}$

Получение реализации  $\mathbf{R}_1$  из произвольной реализации  $\mathbf{R}$  путем преобразования подобия с помощью неособенной матрицы наблюдаемости реализации  $\mathbf{R}$  показано на рис. 2. В результате такого преобразования исходных матриц получаем реализацию  $\mathbf{R}_1$ , о чем свидетельствует единичная матрица наблюдаемости полученной системы.

Аналогичные свойства реализаций справедливы и в случае представления модели системы в виде разностных уравнений. Переход от системы (1.1) к эквивалентным разностным уравнениям вида (1.7)

$$\mathbf{x}_{k+1} = \Phi(T) \mathbf{x}_k + \Gamma(T) u_k; u_{k+1} = \mathbf{H} \mathbf{x}_{k+1}; \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \quad (1.8)$$

осуществляется с помощью известных матричных рядов [3].

Соответствующую уравнениям (1.8) совокупность матриц  $[\Phi(T), \Gamma(T), \mathbf{H}]$  назовем дискретной реализацией и обозначим ее

$$\mathbf{Rd} = [\Phi(T), \Gamma(T), \mathbf{H}]. \quad (1.9)$$

Отметим здесь, что переход от исходной реализации  $\mathbf{R}_1$  к реализации  $\mathbf{Rd}$  сопровождается резким увеличением числа неопределенных параметров по сравнению с реализациями типа  $\mathbf{R}_1$ , поскольку компактная структура матриц  $\mathbf{A}$  при этом не сохраняется.

Для получения наиболее приемлемой структуры (далее также называемой компактной формой) матриц  $\Phi$  осуществим, как это делалось для непрерывной системы, замену переменных вида  $\mathbf{z} = \mathbf{Nd} \cdot \mathbf{x}$  с помощью матрицы наблюдаемости  $\mathbf{Nd}$  реализации  $\mathbf{Rd}$ .

В результате такого перехода получим дискретную реализацию  $\mathbf{Rd}_1$  со следующими матрицами (зависимость матриц от интервала дискретности  $T$  для простоты записи опустим):

$$\begin{aligned} \mathbf{Rd}_1 &= (\Phi_1, \Gamma_1, \mathbf{H}_1); \\ \Phi_1 &= \mathbf{Nd} \Phi \mathbf{Nd}^{-1}, \Gamma_1 = \mathbf{Nd} \Gamma, \mathbf{H}_1 = \mathbf{H} \mathbf{Nd}^{-1}. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Для полученной реализации  $\mathbf{Rd}_1$  справедливы свойства [2, 1], аналогичные свойствам (1.6), (1.7) реализации  $\mathbf{R}_1$ . Перечислим эти свойства без доказательств.

**Свойство 3.** Матрица наблюдаемости  $\mathbf{Nd}_1$  реализации  $\mathbf{Rd}_1$  является единичной:

$$\mathbf{Nd}_1 = \begin{vmatrix} \mathbf{H}_1^T & \dots & (\mathbf{H}_1 \cdot \Phi_1^{n-1})^T \end{vmatrix}^T = \mathbf{E}_n \quad (1.11)$$

**Свойство 4.** Реализация  $\mathbf{Rd}_1 = (\Phi_1, \Gamma_1, \mathbf{H}_1)$  с матрицами (1.10) может быть образована из любой другой полностью наблюдаемой дискретной реализации  $\mathbf{Rd} = (\Phi, \Gamma, \mathbf{H})$  путем изменения базиса пространства состояний с помощью матрицы наблюдаемости  $\mathbf{Nd}$  реализации  $\mathbf{Rd}$ .

Эти свойства свидетельствуют о том, что структура матриц реализации  $\mathbf{Rd}_1$  дискретной системы аналогична структуре матриц реализации  $\mathbf{R}_1$  непрерывной системы, т. е. является компактной структурой:

$$\Phi_1 = \begin{vmatrix} \Theta & | & \mathbf{E}_{n-1} \\ \dots & & \dots \\ -\mathbf{s}^T & & \end{vmatrix}; \Gamma_1 = \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{d}; \mathbf{H}_1 = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix}. \quad (1.12)$$

Здесь обозначено:  $\Theta - [(n-1) \times 1]$  – нулевой вектор;  $\mathbf{E}_{n-1}$  – единичная матрица порядка  $(n-1)$ ;  $\mathbf{M} - (n \times n)$  – нижняя треугольная матрица вида:

$$\mathbf{M} = \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ c_1 & 1 & & & 0 \\ c_2 & c_1 & 1 & & \\ c_3 & c_2 & c_1 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \\ c_{n-1} & c_{n-2} & \dots & c_1 & 1 \end{vmatrix}; \mathbf{d} = \begin{vmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{vmatrix}; \mathbf{s} = \begin{vmatrix} c_n \\ c_{n-1} \\ \vdots \\ c_1 \end{vmatrix}; \mathbf{c} = \begin{vmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{vmatrix}, \quad (1.13)$$

где  $n$ -мерные векторы  $\mathbf{d}$ ,  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{c}$  содержат коэффициенты полиномов числителя ( $\mathbf{d}$ ) и знаменателя ( $\mathbf{c}$  или  $\mathbf{s}$ )  $z$ -передаточной функции  $W(z)$  дискретного звена. Коэффициенты полиномов числителя и знаменателя  $W(z)$  расположены в векторах  $\mathbf{d}$  и  $\mathbf{c}$  в порядке понижения степеней  $z$  с  $n-1$  до 0: элементы  $c_n, d_n$  соответствуют коэффициентам при нулевой степени  $z$ , элементы  $c_1, d_1$  – коэффициентам при  $(n-1)$ -ой степени  $z$ . Векторы  $\mathbf{s}$  и  $\mathbf{c}$  отличаются лишь порядком расположения элементов.

Передаточная функция  $W(z)$  связана с любой дискретной реализацией известным соотношением, которое приведем здесь для реализации  $\mathbf{Rd}_1$  (1.12):

$$W(z) = \mathbf{H}_1 \cdot (z \cdot \mathbf{E}_n - \Phi_1)^{-1} \Gamma_1. \quad (1.14)$$

Для устойчивого динамического объекта из передаточной функции (1.14) можно получить установившееся значение выходной характеристики  $y(\infty)$ :

$$y(\infty) = \mathbf{H1}[\mathbf{E}_n - \mathbf{\Phi1}]^{-1} \mathbf{\Gamma1} u(\infty) \quad (1.15)$$

На рис. 3 приведены результаты, иллюстрирующие свойства 3 и 4 реализаций дискретного звена. Из исходной реализации  $\mathbf{R1}$  непрерывной системы (1.1) последовательно получены реализации  $\mathbf{Rd}$  и  $\mathbf{Rd1}$  дискретной системы. При вычислении матриц наблюдаемости циклически использована встроенная функция **stack**. Результаты вычислений подтверждают справедливость свойств 3 и 4.

$$\begin{aligned} \underline{\underline{\mathbf{A}}} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -4.0 & -2.5 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\mathbf{B}}} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\mathbf{H}}} &:= (1 \ 0 \ 0) & \underline{\underline{\mathbf{T}}} &:= 0.4 & \mathbf{R1} \\ \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} &:= \sum_{k=0}^7 \frac{(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^k \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^k)}{k!} & \underline{\underline{\mathbf{\Gamma}}} &:= \sum_{k=0}^7 \frac{[(\underline{\underline{\mathbf{A}}}^k \cdot \underline{\underline{\mathbf{T}}}^{k+1}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}}]}{(k+1)!} \\ \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} &= \begin{pmatrix} 0.988 & 0.366 & 0.056 \\ -0.084 & 0.764 & 0.226 \\ -0.339 & -0.988 & 0.199 \end{pmatrix} & & & & & & \mathbf{Rd} \\ \underline{\underline{\mathbf{Nd}}} &:= \text{stack}[(\text{stack}(\underline{\underline{\mathbf{H}}}, \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}), \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}}^2)] \\ \underline{\underline{\mathbf{\Phi1}}} &:= \underline{\underline{\mathbf{Nd}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Nd}}}^{-1} & \underline{\underline{\mathbf{\Gamma1}}} &:= \underline{\underline{\mathbf{Nd}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Gamma}}} & \underline{\underline{\mathbf{H1}}} &:= \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{Nd}}}^{-1} \\ \underline{\underline{\mathbf{\Phi1}}} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.368 & -1.376 & 1.951 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\mathbf{\Gamma1}}} &= \begin{pmatrix} 0.036 \\ 0.088 \\ 0.106 \end{pmatrix} & & & & \mathbf{Rd1} \\ \underline{\underline{\mathbf{Nd1}}} &:= \text{stack}[(\text{stack}(\underline{\underline{\mathbf{H1}}}, \underline{\underline{\mathbf{H1}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi1}}}), \underline{\underline{\mathbf{H1}}} \cdot \underline{\underline{\mathbf{\Phi1}}}^2)] & \underline{\underline{\mathbf{H1}}} &= (1 \ 0 \ 0) \\ \underline{\underline{\mathbf{Nd1}}} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} & & & & & \text{Матрица наблюдаемости реализации Rd1} \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}} &:= (1 \ 0 \ 0) & \underline{\underline{\mathbf{E}}} &:= \text{identity}(3) \\ \underline{\underline{\mathbf{F}}} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.36788 & -1.37597 & 1.95053 \end{pmatrix} & \underline{\underline{\mathbf{G}}} &:= \begin{pmatrix} 0.03616 \\ 0.08778 \\ 0.10642 \end{pmatrix} \\ |z \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{F}}}| &\rightarrow z^3 - 1.95053 \cdot z^2 + 1.37597 \cdot z - .36788 & & & & & \text{Знаменатель } W(z) \\ \underline{\underline{\mathbf{V}}}(z) &:= \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot (z \cdot \underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{F}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} & \underline{\underline{\mathbf{V}}}(1) &= 0.667 \\ \underline{\underline{\mathbf{M}}} \cdot (\underline{\underline{\mathbf{E}}} - \underline{\underline{\mathbf{F}}})^{-1} \cdot \underline{\underline{\mathbf{G}}} &= 0.667 & y(\infty) &\text{ для реализации Rd1} \\ \underline{\underline{\mathbf{H}}} \cdot (-\underline{\underline{\mathbf{A}}}^{-1}) \cdot \underline{\underline{\mathbf{B}}} &= 0.667 & y(\infty) &\text{ для исходной реализации R1} \end{aligned}$$

Рис. 3. Свойства дискретных реализаций

В целях экономии места, на рис. 3 приведено лишь выражение для знаменателя  $z$ -передаточной функции  $W(z)$ . Эта функция, обозначенная в файле (см. рис. 3) как  $V(z)$ , использована для нахождения установившегося значения выходной переменной двумя способами. В первом с этой целью вычислено значение передаточной функции при  $z = 1$ , во втором применялось выражение (1.15) при  $u(\infty) = 1$ . Полученные установившиеся значения переходной характеристики дискретного звена имеют незначительную погрешность, вызванную выбором предельно допустимого для этого случая интервала дискретности ( $T = 0.4$ ). При уменьшении этого значения вдвое результаты анализа непрерывного и дискретного звеньев практически совпадают. При получении  $W(z)$  по (1.14) использованы вспомогательные матрицы  $\mathbf{F}$ ,  $\mathbf{G}$ ,  $\mathbf{M}$ , в которые были введены матрицы реализации  $\mathbf{Rd1}$  [3].

Полученные соотношения (1.3) – (1.10) обеспечивают возможность эквивалентного перехода от непрерывных моделей динамических систем к соответствующим разностным, дискретным аналогам.

Следует отметить, что приведенные выражения и свойства 1 – 4 являются необходимыми, но не достаточными для решения задач определения параметров, поскольку

неопределенным остается вопрос обратного перехода от реализаций дискретного звена ( $\mathbf{Rd}$  или  $\mathbf{Rd}_1$ ) к реализациям непрерывного звена  $\mathbf{R}$  или  $\mathbf{R}_1$ .

В работе [4] показано, что обратный переход от произвольной реализации  $\mathbf{Rd} = (\Phi(T), \Gamma(T), \mathbf{H})$  дискретной системы к некоторой реализации  $\mathbf{R}^* = (\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{H}^*)$  непрерывной системы может быть осуществлен с помощью следующих соотношений:

$$\mathbf{A}^* = \frac{2}{T} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[(\Phi - \mathbf{E}) \cdot (\Phi + \mathbf{E})^{-1}]^{2 \cdot k + 1}}{2 \cdot k + 1}; \quad \mathbf{B}^* = (\Phi - \mathbf{E})^{-1} \mathbf{A}^* \Gamma; \quad \mathbf{H}^* = \mathbf{H}. \quad (1.16)$$

Матричный логарифмический ряд для нахождения  $\mathbf{A}^*$  при корректном выборе интервала дискретности может вычисляться с высокой точностью при числе членов, равном 7. Это значение можно использовать и в матричных рядах для получения  $\Phi(T), \Gamma(T)$ .

Матрицы  $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{H}^*$  составляют реализацию  $\mathbf{R}^*$  непрерывной системы, причем структура матрицы  $\mathbf{A}^*$  в общем случае имеет заполненную форму ( $n^2$  элементов). Для перехода к компактной форме (реализации  $\mathbf{R}_1^*$ ) и последующего восстановления параметров передаточной функции  $W(p)$  с помощью выражений (1.3), (1.4) следует воспользоваться свойством (1.7).

Таким образом, взаимно обратные преобразования включают последовательность преобразований по переходу от произвольной реализации  $\mathbf{R}$  непрерывной системы через реализации  $\mathbf{R}_1, \mathbf{Rd}, \mathbf{Rd}_1, \mathbf{R}^*$  к реализации  $\mathbf{R}_1^*$  с использованием соотношений (1.3) – (1.16). Выражения (1.16), (1.3), (1.4) замыкают последовательность взаимно обратных преобразований, позволяя получить компактную реализацию  $\mathbf{R}_1^*$  непрерывной системы из произвольной реализации  $\mathbf{Rd}$  дискретной системы. Качество описываемых преобразований можно оценить путем сопоставления матриц исходной  $\mathbf{R}_1$  и результирующей  $\mathbf{R}_1^*$  реализаций.

Последовательность взаимно обратных преобразований иллюстрируется на примере, представленном на рис. 4 и 5. В примере использованы исходные данные, принятые в предыдущей задаче (см. рис. 3). Справа на представленном фрагменте приводятся названия реализаций, к которым относятся получаемые матрицы. Матрицы  $\mathbf{H} = \mathbf{H1}$  ввиду их полной идентичности для каждой реализации не выведены. Матрицы наблюдаемости формируются в примере двумя способами: многократным использованием функции **stack** и применением этой функции с тремя аргументами. Вычисления производились при  $T = 0.2$ .

Введенное обозначение  $\mathbf{R}_1^* = (\mathbf{L}, \mathbf{K}, \mathbf{M})$  относится к компактной реализации непрерывной системы, восстановленной из дискретной системы, причем матрицы  $\mathbf{L}, \mathbf{K}, \mathbf{M}$  имеют структуру матриц (1.3), (1.4). Сопоставляя исходные матрицы  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H}$  с матрицами  $\mathbf{L}, \mathbf{K}, \mathbf{M}$  заключительного этапа преобразований (см. рис. 4), можно заметить их практически абсолютное равенство. Это означает, что, получая с помощью каких-либо алгоритмов параметры системы одного типа, с помощью соответствующей части взаимно обратных преобразований (см. рис. 4) можно определить параметры эквивалентной системы другого типа с высокой точностью.

На рис. 5 приведены числовые значения матриц последовательности взаимно обратных преобразований для рассмотренного на рис. 4 примера. Матрицы наблюдаемости компактных реализаций  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{Rd}_1$  не приведены, поскольку, в силу описанных выше свойств, они – единичные.

$$\begin{aligned}
\underline{A} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -4.0 & -2.5 \end{pmatrix} & \underline{B} &:= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} & \underline{T} &:= 0.2 & \underline{R1} \\
\underline{H} &:= (1 \ 0 \ 0) & & & & & \\
\underline{\Phi} &:= \sum_{k=0}^7 \frac{(\underline{A} \cdot \underline{T})^k}{k!} & \underline{\Gamma} &:= \sum_{k=0}^7 \frac{(\underline{A} \cdot \underline{T})^{k+1} \cdot \underline{B}}{(k+1)!} & & & \underline{Rd} \\
\underline{N}d &:= \text{stack}(\text{stack}(\underline{H}, \underline{H} \cdot \underline{\Phi}), \underline{H} \cdot \underline{\Phi}^2) & \underline{E} &:= \text{identity}(3) & & & \\
\underline{\Phi}1 &:= \underline{N}d \cdot \underline{\Phi} \cdot \underline{N}d^{-1} & \underline{\Gamma}1 &:= \underline{N}d \cdot \underline{\Gamma} & \underline{H}1 &:= \underline{H} \cdot \underline{N}d^{-1} & \underline{Rd1} \\
\underline{A}1 &:= \frac{2}{T} \sum_{k=0}^7 \frac{[(\underline{\Phi}1 - \underline{E}) \cdot (\underline{\Phi}1 + \underline{E})^{-1}]^{2 \cdot k + 1}}{2 \cdot k + 1} & & & & & \text{Восстановление параметров} \\
& & & & & & \text{непрерывного звена} \\
\underline{B}1 &:= (\underline{\Phi}1 - \underline{E})^{-1} \cdot \underline{A}1 \cdot \underline{\Gamma}1 & \underline{H}1 &:= (1 \ 0 \ 0) & & & \underline{R^*} \\
\underline{N}1 &:= \text{stack}(\underline{H}1, \underline{H}1 \cdot \underline{A}1, \underline{H}1 \cdot \underline{A}1^2) & & & & & \\
\underline{L} &:= \underline{N}1 \cdot \underline{A}1 \cdot \underline{N}1^{-1} & \underline{K} &:= \underline{N}1 \cdot \underline{B}1 & \underline{M} &:= \underline{H}1 \cdot \underline{N}1^{-1} & \underline{R1^*} \\
\underline{L} &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7.105 \times 10^{-15} & 0 & 1 \\ -1.5 & -4 & -2.5 \end{pmatrix} & \underline{K} &= \begin{pmatrix} -5.42 \times 10^{-10} \\ 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} & \underline{M} &= (1 \ 0 \ 0) & \text{Восстановленная реализация}
\end{aligned}$$

Рис. 4. Последовательность взаимно обратных преобразований

Анализируя полученные данные (см. рис. 5), можно заметить последовательное изменение структуры матриц при переходе от одной реализации к другой, что полностью согласуется с указанными теоретическими положениями. Так, при переходе от непрерывной системы с реализацией  $\mathbf{R}_1$  к дискретной системе с  $\mathbf{Rd}$ , матрицы теряют свойство компактных реализаций. В частности, матрица  $\Phi$  получает  $n^2$  элементов при числе  $n$  значимых параметров матрицы  $A$ . Аналогичное изменение структуры матриц происходит при восстановлении реализации  $\mathbf{R}^*$  непрерывной системы из компактной реализации  $\mathbf{Rd}_1$ . Свойства компактной реализации приобретает результирующая реализация  $\mathbf{R}_1^*$ , которая находится преобразованием подобия (1.7) реализации  $\mathbf{R}^*$  с применением матрицы наблюдаемости последней.

Данные, приведенные на рис. 4 и 5, свидетельствуют о высокой эффективности и простоте применения символьных преобразований в этой достаточно сложной задаче, высокой точности взаимно обратных преобразований и возможности применения этих преобразований в процессе решения рассматриваемой задачи оценки параметров.

## 2. Формализация и решение задачи (общий случай)

Преобразования моделей, рассмотренные в предыдущем разделе, позволяют сформулировать задачу определения параметров динамических систем (звеньев) путем прямого использования входных и выходных данных следующим образом.

Пусть линейное динамическое звено (непрерывное или дискретное) порядка  $n$  представлено своим входным сигналом  $u$  и выходным сигналом  $y$ , которые получены посредством измерений через интервал дискретности  $T$ .



$$\begin{aligned}
A &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1.5 & -4 & -2.5 \end{pmatrix} & B &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} & H &= (1 \ 0 \ 0) & \text{R1} \\
\Phi &= \begin{pmatrix} 0.998 & 0.195 & 0.017 \\ -0.025 & 0.931 & 0.153 \\ -0.23 & -0.638 & 0.548 \end{pmatrix} & \Gamma &= \begin{pmatrix} 9.585 \times 10^{-3} \\ 0.093 \\ -0.073 \end{pmatrix} & & \text{Rd} \\
N_d &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0.998 & 0.195 & 0.017 \\ 0.988 & 0.366 & 0.056 \end{pmatrix} & & & & \\
\Phi_1 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0.607 & -2.093 & 2.477 \end{pmatrix} & \Gamma_1 &= \begin{pmatrix} 9.585 \times 10^{-3} \\ 0.027 \\ 0.04 \end{pmatrix} & & \text{Rd1} \\
A_1 &= \begin{pmatrix} -8.235 & 11.747 & -3.534 \\ -2.144 & -0.837 & 2.991 \\ 1.814 & -8.405 & 6.573 \end{pmatrix} & B_1 &= \begin{pmatrix} -5.42 \times 10^{-10} \\ 0.093 \\ 0.169 \end{pmatrix} & & \text{R}^* \\
N_1 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -8.235 & 11.747 & -3.534 \\ 36.223 & -76.867 & 41.013 \end{pmatrix} & & & & \\
L &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 7.105 \times 10^{-15} & 0 & 1 \\ -1.5 & -4 & -2.5 \end{pmatrix} & K &= \begin{pmatrix} -5.42 \times 10^{-10} \\ 0.5 \\ -0.25 \end{pmatrix} & & \text{R1}^*
\end{aligned}$$

Рис. 5. Результаты этапов преобразований

Требуется определить параметры эквивалентных форм описания звена, в том числе:

- передаточной функции  $W(p)$  (1.2);
- системы  $n$  дифференциальных уравнений в форме Коши (1.1);
- системы  $n$  разностных уравнений (1.8);
- $z$ -передаточной функции  $W(z)$  (1.14);
- разностного уравнения  $n$ -го порядка вида

$$y_k + c_1 y_{k-1} + \dots + c_n y_{k-n} = d_1 u_{k-1} + \dots + d_n u_{k-n}. \quad (2.1)$$

Эти формы связаны между собой соотношениями (1.3), (1.14), (1.16). Уравнение (2.1) легко получить из  $z$ -передаточной функции  $W(z)$  (1.14) или из реализации  $\mathbf{Rd}_1$  (1.12), (1.13).

Таким образом, имеется множество результатов измерений  $y_i, u_i, i = 0, 1, 2, \dots, N$ , которые необходимо использовать для получения:

- вектора параметров  $\mathbf{g}$  размерностью  $(2n \times 1)$ :  
 $\mathbf{g}^T = [-\mathbf{c}^T, \mathbf{d}^T], \mathbf{c}^T = [c_1, c_2, \dots, c_n], \mathbf{d}^T = [d_1, d_2, \dots, d_n],$  (2.2)
- передаточных функций  $W(p), W(z)$ ;
- матриц разностных и дифференциальных уравнений.

Взаимно обратные преобразования, рассмотренные в предыдущем разделе, позволяют решить поставленную задачу.

Векторы  $\mathbf{c}$  и  $\mathbf{d}$  (2.2) коэффициентов полиномов числителя и знаменателя  $z$ -передаточной функции и входят в матрицы (1.12), (1.13) реализации  $\mathbf{Rd}_1$ . В случае, когда известным является установившееся значение переходной характеристики  $y(\infty)$  дискретного звена (4.15), это значение может быть использовано для контроля правильности получаемых результатов оценки вектора  $\mathbf{g}$ . Кроме того,  $y(\infty)$  можно использовать в качестве дополнительной информации для сокращения числа искомых параметров на единицу.

Подставляя в соотношение (1.15) матрицы реализации  $\mathbf{Rd}_1$  (1.12), (1.13), получаем для  $y(\infty)$  необходимое выражение:

$$y(\infty) = \mathbf{H1}[\mathbf{M} - \mathbf{M}\Phi\mathbf{1}]^{-1} \mathbf{d} \quad (2.3)$$

или через искомые элементы:

$$y(\infty) = \sum_{i=1}^n d_i / (1 + \sum_{i=1}^n c_i) = \sum_{j=n+1}^{2n} g_j / (1 - \sum_{k=1}^n g_k). \quad (2.4)$$

На рис. 6 представлено получение символьными преобразованиями выражений для  $z$ -передаточной функции (1.14) и установившегося значения (2.3) переходной характеристики  $y(\infty)$  дискретного звена третьего порядка. Передаточная функция  $W(z)$  получена с использованием выражения, аналогичного (1.5), учитывающего неособенность матрицы  $\mathbf{M}$  (1.13).

$$\begin{aligned} \Phi\mathbf{1} &:= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -c3 & -c2 & -c1 \end{pmatrix} & \mathbf{M} &:= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ c1 & 1 & 0 \\ c2 & c1 & 1 \end{pmatrix} & \mathbf{d} &:= \begin{pmatrix} d1 \\ d2 \\ d3 \end{pmatrix} & \mathbf{Rd1} \\ \mathbf{H1} &:= (1 \ 0 \ 0) & \mathbf{E} &:= \text{identity}(3) \\ \mathbf{H1} \cdot (z\mathbf{M} - \mathbf{M}\Phi\mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{d} \text{ simplify} & \rightarrow & \frac{z^2 \cdot d1 + z \cdot d2 + d3}{z^3 + c1 \cdot z^2 + c2 \cdot z + c3} & W(z) \\ \mathbf{H1} \cdot (\mathbf{M} - \mathbf{M}\Phi\mathbf{1})^{-1} \cdot \mathbf{d} \text{ simplify} & \rightarrow & \frac{d1 + d2 + d3}{1 + c1 + c2 + c3} & y(\infty) \end{aligned}$$

Рис. 6. Символьные преобразования реализации  $\mathbf{Rd1}$

Важную роль в задачах оценки параметров с использованием беспойсковых алгоритмов, играют характеристики входного сигнала исследуемого объекта. При испытаниях объектов имеется возможность варьирования входных сигналов. Характеристики некоторых из них (например, нелинейных сигналов) могут улучшить условия определения параметров объекта путем использования данных о его входе и выходе. Другие входные сигналы (например, постоянные) могут быть неприемлемыми с точки зрения рассматриваемой задачи.

Опустим здесь обсуждение вопросов выбора рациональных входных сигналов. Это отдельный, достаточно большой вопрос [3]. Отметим лишь, что исходные данные могут быть преобразованы к требуемому виду путем введения вспомогательного звена с передаточной функцией  $U(p)$ , при которой результирующая реакция  $f(t)$  объекта с передаточной функцией  $W(p)$  удовлетворяет следующему операторному выражению:

$$f(p) = W(p)U(p)1/p = W(p)u(p); \quad u(p) = U(p)1/p. \quad (2.5)$$

В случае, когда исходно задана переходная характеристика  $h(t)$  звена с передаточной функцией  $W(p)$ , выражение (2.5) можно переписать в виде

$$f(p) = U(p)W(p)1/p = U(p)h(p). \quad (2.6)$$

Выражения (2.5), (2.6) позволяют перейти от задачи определения параметров передаточной функции  $W(p)$  по единичному входному сигналу  $1(t)$  и реакции  $h(t)$  к задаче определения  $W(p)$  по входному сигналу  $u(t)$  и реакции  $f(t)$  на него.

В описанных условиях решение задачи определения  $2n$  неизвестных параметров объекта (1.2) для различных форм его представления достигается в общем случае (без использования дополнительной информации) последовательным выполнением ряда этапов:

- 1) с помощью одного из алгоритмов, рассматриваемых ниже, данные  $y_i$ ,  $u_i$  используются для определения вектора неизвестных параметров  $\mathbf{g}$  (1.18);
- 2) полученный вектор используется для формирования матриц реализации  $\mathbf{Rd}_1 = (\Phi\mathbf{1}, \mathbf{G}\mathbf{1}, \mathbf{H1})$  (1.12), (1.13) разностных уравнений (1.8);
- 3) по выражению (1.14) получаем искомую  $z$ -передаточную функцию;

4) с помощью (1.16) осуществляется переход к эквивалентной непрерывной системе в форме Коши с реализацией  $\mathbf{R}^* = (\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*, \mathbf{H}^*)$ ;

5) формируется матрица наблюдаемости  $\mathbf{N}^*$  реализации  $\mathbf{R}^*$ ;

6) преобразование подобия (1.7) из реализации  $\mathbf{R}^*$  восстанавливается реализация  $\mathbf{R}_1^* = (\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{H})$ , удовлетворяющая выражениям (1.3), (1.4);

7) полученные на предыдущем этапе матрицы реализации  $\mathbf{R}_1$  используются для определения параметров передаточной функции  $W(p)$  (1.2).

Последовательность перечисленных этапов представляет собой удобный алгоритм получения параметров всех эквивалентных форм описания исследуемого объекта.

Поскольку необходимые выражения для этапов 2 – 7 были получены ранее, рассмотрим здесь лишь алгоритмы реализации этапа 1.

Этап 1 может быть выполнен с применением ряда подходов, относящихся к классу решений систем линейных алгебраических уравнений. Основой этих подходов служит метод наименьших квадратов в форме обобщенного обращения матриц или в рекуррентной форме.

Для получения решения методом наименьших квадратов представим уравнение (1.17) в виде

$$y_k = -c_1 y_{k-1} - \dots - c_n y_{k-n} + d_1 u_{k-1} + \dots + d_n u_{k-n} \quad (2.7)$$

или в векторно-матричной форме:

$$y_k = \mathbf{f}_{k-1}^T \mathbf{g}, \quad \mathbf{f}_{k-1}^T = (y_{k-1} \dots y_{k-n} \mid u_{k-1} \dots u_{k-n}), \quad (2.8)$$

где вектор  $\mathbf{g}$  имеет структуру, соответствующую (2.2).

Фиксируя значения входного сигнала и соответствующей выходной реакции системы через  $q$  тактов ( $q = 1, 2, 3, \dots$ ), получаем систему  $L$  уравнений ( $L \geq 2n$ ):

$$\mathbf{Y}_L = \mathbf{F}_L \mathbf{g}, \quad (2.9)$$

где

$$\mathbf{F}_L = \begin{bmatrix} \mathbf{f}_{k-1}^T \\ \mathbf{f}_{k+q-1}^T \\ \vdots \\ \mathbf{f}_{k+(L-1)q-1}^T \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Y}_L = \begin{bmatrix} y_k \\ y_{k+q} \\ \vdots \\ y_{k+(L-1)q} \end{bmatrix}. \quad (2.10)$$

Решение системы уравнений (2.7) будем искать в виде

$$\hat{\mathbf{g}}_L = (\boldsymbol{\varepsilon} \mathbf{E}_{2n} + \mathbf{F}_L^T \cdot \mathbf{F}_L)^{-1} \mathbf{F}_L^T \cdot \mathbf{Y}_L, \quad (2.11)$$

где  $\hat{\mathbf{g}}_L - (2n \times 1)$  – вектор оценок искомых параметров по результатам решения  $L$  уравнений;

$\mathbf{E}_{2n}$  – единичная матрица порядка  $2n$ ;  $\boldsymbol{\varepsilon}$  – параметр регуляризации, обеспечивающий достижение решения в случае плохой обусловленности матрицы  $\mathbf{F}_L^T \mathbf{F}_L$ . Выбор параметра  $\boldsymbol{\varepsilon}$  выходит за рамки представленного материала. Некоторые рекомендации по этому выбору содержатся в [5].

Получение вектора параметров по алгоритму (2.11) дает возможность определить матрицы разностной системы, т.е. сформировать реализацию  $\mathbf{Rd}_1$ , используя (1.12) и (1.13), и осуществить дальнейшие преобразования, цепочка которых была приведена на рис. 4, для нахождения остальных искомых элементов. Ниже для простоты записи подстрочный индекс  $L$  в элементах выражения (2.11) будем опускать.

Рассмотрим пример определения параметров различных форм представления звена с применением описанного подхода, который базируется на использовании взаимно обратных преобразований (см. рис. 4). В качестве исходных данных примем данные звена, рассмотренного ранее на рис. 3 – 5. Расчеты проведем в среде MathCAD Pro. Ввиду большого размера получающегося mcd-документа с решением этого примера, представление результатов вычислений на рис. 7 – 9 дается последовательностью взаимосвязанных частей

этого документа. Как и ранее, для возможности оценки качества рассматриваемого подхода, путем пропускания входных сигналов через объект с известными характеристиками будут формироваться эталонные исходные данные. В примере используется разностная форма представления исходного звена для получения массивов данных входной и выходной последовательностей.

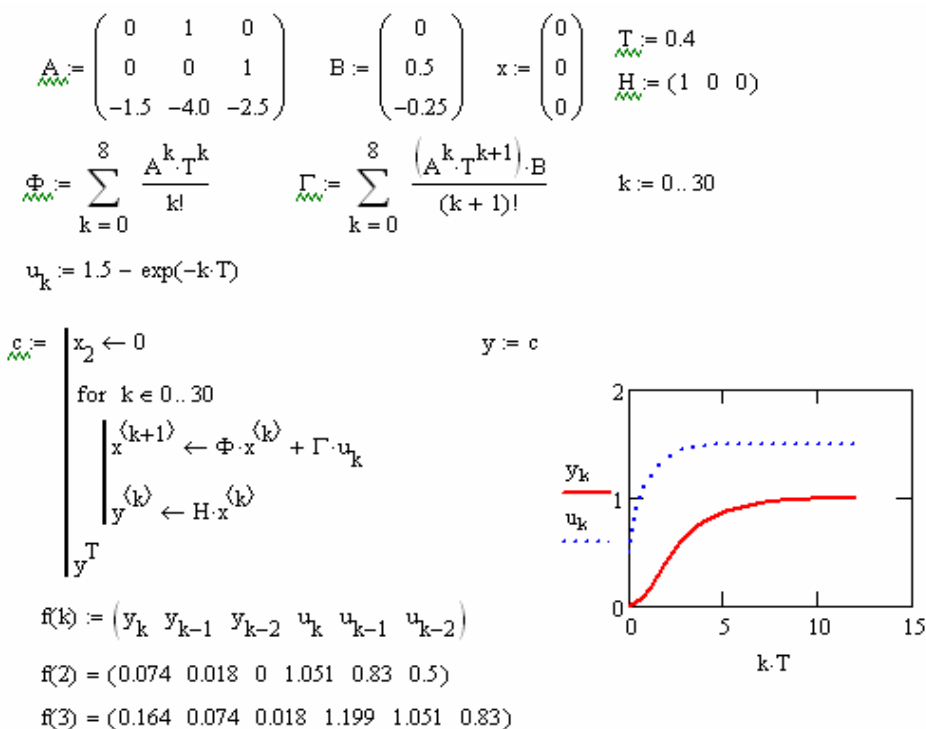


Рис. 7. Формирование входных и выходных последовательностей

В качестве входного сигнала в примере выбран экспоненциальный сигнал (см. рис. 7), который может быть представлен также и реакцией вспомогательного звена с передаточной функцией первого порядка. Процедуры получения входного и выходного сигналов звена содержатся в первой части документа (см. рис. 7). Результаты вычислений выходного сигнала звена выводятся функцией  $\underline{c}$  программного модуля в виде вектора-столбца  $\underline{y}$  с 31 элементом. Эти данные используются для формирования строк  $\underline{f}$  матрицы  $\underline{F}$  и элементов вектора  $\underline{Y}$  (2.10) системы линейных алгебраических уравнений (2.9).

Формирование матрицы F

Формирование вектора Y

```

d := | F ← f(q)
      m ← 0
      for k ∈ 1..8
        | m ← (k + 1) · q
        | F ← stack(F, f(m))
      F
    
```

q := 3

```

a := | Y0 ← yq+1
      m ← 0
      for k ∈ 1..8
        | m ← (k + 1) · q + 1
        | Yk ← ym
      Y
    
```

F := d

Y := a

Решение системы

R := 0.6 · 10<sup>-10</sup> · identity(6)

g := (F<sup>T</sup> · F + R)<sup>-1</sup> · F<sup>T</sup> · Y

g<sup>T</sup> = (1.951 -1.376 0.368 0.037 0.016 -0.015)

Рис. 8. Формирование элементов уравнения (2.9) и решение системы

```

h1 := (0 0 0 1 1 1)    h2 := (1 1 1 0 0 0)
y(∞) := (h1 · g) · (1 - h2 · g)-1    y(∞) = 0.6667
Φ1 := ( 0 1 0
        0 0 1
        g2 g1 g0)
Γ1 := ( 1 0 0
        -g0 1 0
        -g1 -g0 1) · (g3
                      g4
                      g5)

E := identity(3)
A1 := 2/T · ∑k=010 [(Φ1 - E) · (Φ1 + E)-1]2 · k + 1
B1 := (Φ1 - E)-1 · A1 · Γ1    H1 := H
N1 := stack(stack(H, H · A1), H · A12)
N1 · A1 · N1-1 = ( 0 1 0
                  0 0 1
                  -1.5 -4.0 -2.5)
b1 := N1 · B1    b1 = ( 0.0023
                       0.4966
                       -0.2508)
H · N1-1 = (1 0 0)
    
```

Рис.9. Получение параметров реализаций **Rd<sub>1</sub>** и **R<sub>1</sub>**

Формирование системы (2.9) в рассматриваемом примере осуществляется путем выбора данных через  $q$  отсчетов (рис.8,  $q = 3$ ). Заполнение матрицы **F** и вектора **Y** выполнено с помощью программных модулей (см. рис. 8). При выбранных параметрах циклов результирующая система (2.9) содержит 9 уравнений. Решение этой системы приведено для принятого значения параметра регуляризации (см. рис. 8). Результирующий вектор **g** на рис. 8 выделен заливкой.

На рис. 9 элементы найденного вектора используются для проверки установившегося значения переходной характеристики звена по (2.4) и для формирования матриц дискретной и непрерывной реализаций в соответствии с процедурой взаимно обратных преобразований. Так, с помощью (1.12), (1.13) находятся матрицы реализации **Rd<sub>1</sub>**, которые затем пересчитываются в параметры реализации **R\*** с помощью (1.16). Формируя матрицу наблюдаемости реализации **R\*** и осуществляя с ее участием преобразование подобия, получаем восстановленные матрицы реализации **R<sub>1</sub>\*** исходной непрерывной системы.

Для сопоставления и оценки точности полученных значений в нижней части (см. рис. 9) справа приводятся эталонные элементы реализации  $\mathbf{R}_1$ . Полученные результаты свидетельствуют о высокой точности процедуры оценки искомых параметров динамического звена.

## 5. Заключение

Опыт использования описанного подхода к решению задач оценки параметров позволяет сделать следующие выводы:

метод обеспечивает высокую точность оценки параметров при выборе интервалов дискретности, не превышающих верхней границе допустимых значений;

численное решение задач оценки в ряде случаев требует принятия мер в связи с плохой обусловленностью матриц  $\mathbf{F}_L^T \cdot \mathbf{F}_L$  в (2.11): выбора рационального входного сигнала, введения параметра регуляризации;

в случае, когда известна лишь переходная характеристика объекта, задача оценки параметров может быть решена путем эквивалентного преобразования входных и выходных сигналов объекта с помощью выражений ((2.5), (2.6).

Эти рекомендации даются здесь без комментариев. Подробное их рассмотрение и иллюстрация необходимости каждого из них заслуживает отдельного детального рассмотрения в рамках анализа возможных путей повышения достоверности оценки.

Статья подготовлена при финансовой поддержке Министерства образования (грант ТОО – 3.2 – 726; номер государственной регистрации 01.2.00103629).

## Литература

1. Ивановский Р.И. Аппроксимации данных наблюдений среде MathCAD Pro. // Exponenta Pro. Математика в приложениях. – 2003. – № 1. С. 66–72.
2. Чебраков Ю.В. Теория оценивания параметров в измерительных экспериментах. – СПб. Изд-во СПбГУ, 1997. – 300 с.
3. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD 7.0 Pro, MathCAD 8.0 Pro и MathCAD 2000 Pro. – Учебное пособие. – СПб.: Изд-во СПбГТУ, 2000. – 201 с.
4. Ивановский Р.И. Об одном преобразовании в задачах определения параметров непрерывных динамических систем // Изв. АН СССР. Техническая кибернетика. – 1970. – № 1. С.180–189.
5. Ивановский Р.И. Проблема обеспечения сходимости вычислительного процесса в одной задаче определения параметров моделей стохастических систем // Int. Conf. “Intelligent Systems and Information Technologies in Control” (IS&ITC – 2000): Сб. тр. конф. – St.Peterburg / Pscov, SPbSTU Published, 2000. – С. 235–238.