Журнал Exponenta Pro. Математика в приложениях. 2003, № 3, с. 93-94.

Вычисление кратных интегралов

Вопрос. Как с помощью двойного интеграла найти объем тела, ограниченного поверхностями. Alexandr Taloverov (funman2000@mail.ru).

Ответ. Системы MathCAD Pro предоставляют широкие возможности для символьного и численного вычисления кратных интегралов, облегчая получение конечного результата в этих, в общем случае, нетривиальных задачах. Область приложений кратных интегралов весьма широка, однако, здесь не ставится задача исчерпывающего анализа всех возможных случаев применения кратных интегралов в прикладных задачах. Проиллюстрируем эффективность использования среды MathCAD Pro при вычислениях кратных интегралов на двух типовых задачах.

Задача 1. Вычислить объем тела, образованного прямым круговым полуцилиндром с радиусом *R* и секущей плоскостью, проходящей через диаметр основания цилиндра и границу цилиндра на высоте *h*.

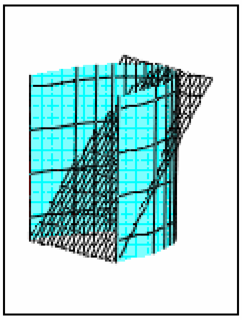
Выберем прямоугольную систему координат XYZ, в которой XOY – плоскость основания цилиндра, причем на оси OX расположим диаметр основания, через который проходит плоскость; начало координат совместим с центром круга основания цилиндра. Тогда искомый объем может быть выражен с помощью трехкратного (вариант 1) и двукратного (вариант 2) интегралов, символьное вычисление которых приведено на рис..1.

Вариант 1

$$\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}}\int_{0}^{\frac{h}{R}\cdot y} 1\,dz\,dy\,dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot h\cdot R^2$$

Вариант 2

$$\int_{-R}^{R}\int_{0}^{\sqrt{R^2-x^2}} \frac{h}{R}\cdot y\,dy\,dx \rightarrow \frac{2}{3}\cdot h\cdot R^2$$



Z,z1

Рис..1. Решение задачи 1

Двукратный интеграл в данной задаче образуется после вычисления внутреннего интеграла в варианте 1, в результате которого получаем уравнение секущей площади вида: $z = hy/R$. Справа (см. рис. 1) изображено рассматриваемое тело, которое получено в среде MathCAD 2001 Pro с помощью встроенных функций **CreateMesh**. для построения полуцилиндра и плоскости.

Задача 2. Вычислить объем тела, заключенного между сферой с радиусом, равным 4, цилиндром $x^2+y^2=4x$ и ограниченного плоскостями XOY, XOZ.

На рис. 2 приведено решение этой задачи в прямоугольных и цилиндрических координатах. Справа (см. рис. 2) изображена кривая, ограничивающая основание цилиндра.

в прямоугольных координатах $\quad r := 4$

$$\int_0^r \int_0^{\sqrt{r \cdot x - x^2}} \int_0^{\sqrt{r^2 - x^2 - y^2}} 1 \, dz \, dy \, dx = 19.2881$$

в цилиндрических координатах

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{r \cdot \cos(\phi)} \int_0^{\sqrt{r^2 - \rho^2}} \rho \, dz \, d\rho \, d\phi = 19.2881$$

$$y(x) := \sqrt{4x - x^2}$$

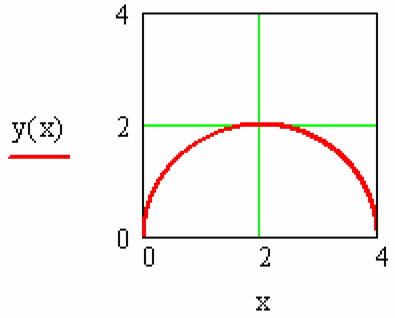


Рис. 2. Решение задачи 2

Так же, как и в предыдущей задаче, искомый объем может быть вычислен с помощью двукратных интегралов.