

УДК 519.254

## **Анализ межканальных связей ЭЭГ на основе корреляционных отношений**

©2016 Ивановский Р.И.<sup>\*</sup>, Новожилов М.А.<sup>\*\*</sup>

*Санкт-Петербургский политехнический университет Петра Великого, Санкт-Петербург, Россия*

**Аннотация.** Предлагается подход к анализу взаимосвязей каналов электроэнцефалограмм с использованием корреляционных отношений, способных объективно оценивать свойства связей при любых их моделях. Показано, что значения корреляционных отношений могут служить индикаторами нелинейности связей. На основе предложенной матрицы корреляционных отношений показана возможность анализа множественных связей, вводится понятие доминантных каналов. Обсуждаются алгоритмы и программы анализа.

**Ключевые слова:** *межканальный анализ ЭЭГ, корреляционное отношение, корреляционный анализ, нелинейная корреляция, множественная корреляция.*

### **ВВЕДЕНИЕ**

Проблема обработки данных электроэнцефалограмм (ЭЭГ) и поиска путей эффективного использования результатов обработки в клинической практике продолжает оставаться весьма актуальной. Одна из важных задач этого направления связана с анализом особенностей связи каналов ЭЭГ, а, следовательно, и соответствующих корковых зон головного мозга. Анализ связей необходим при решении множества прикладных задач оценки текущего состояния объекта исследования, контроля динамики изменений, диагностики и формирования лечебных процедур. Эти задачи обсуждаются отечественными и зарубежными специалистами с привлечением различных методов.

На текущий момент в совокупности известных работ подобного класса, достаточно четко обозначились два направления. Одно из них (превалирующее) прямо или косвенно предполагает линейность модели связи. Другое – допускает наличие нелинейных связей.

Работы первого направления в своей массе используют в качестве основного параметра коэффициент корреляции Пирсона  $r$ . Вводятся также и другие коэффициенты. Отметим здесь, что ввод очередного нового параметра в работах этого направления способен привести лишь к появлению еще одной шкалы значений для уровней связи, поскольку линейная основа остается неизменной.

В [1] обобщаются методы количественной электроэнцефалографии, отмечается наиболее широкое распространение линейного подхода и параметров  $r$  в практике анализа данных ЭЭГ и магнитоэнцефалограмм (МЭГ). В [2] на основе параметров коэффициента корреляции анализируются данные ЭЭГ и МЭГ для оценки связи между альфа-ритмами правой и левой областей мозга при разных режимах работы глаз.

---

<sup>\*</sup>iri@dcn.icc.spbstu.ru

<sup>\*\*</sup>markhero@mail.ru

Авторы этой статьи особо отмечают преимущества коэффициента корреляции Пирсона: простоту алгоритма вычисления и широкую область применения. Однако с этим можно согласиться лишь отчасти. Простота алгоритма не гарантирует получение объективных оценок уровней связи, а область практического использования  $r$  существенно ограничена, о чем будет сказано ниже. В работах [3–7], линейный подход и полученные в [2] результаты применяются для решения ряда конкретных задач:

- для проверки влияния опухоли мозга на функциональные связи. Анализ проводится с помощью МЭГ на всем диапазоне частот и отдельно – для гамма-ритмов [3].
- для анализа изменений в гиппокампе при рассеянном склерозе с использованием магнитного резонанса [4].
- для изучения влияния слуховых галлюцинаций на кору головного мозга при шизофрении с использованием данные ЭЭГ и МЭГ [5].
- при анализе различий между состояниями – от бодрствования к сонливости [6].
- при изучении влияния расстояний между электродами ЭЭГ на межканальные связи [7].

В работах [8–10], для оценки связей, наряду с  $r$ , предлагается другой параметр – взаимная информация  $MI(X, Y)$ . В [10] этот параметр описан формулой в виде двойного интеграла в бесконечных пределах от произведения  $f_{X,Y}(x, y) \log_2 \frac{f_{X,Y}(x, y)}{f_X(x)f_Y(y)}$ . Здесь

$f_{X,Y}(x, y)$  – плотность совместного распределения вероятностей случайных величин  $X$  и  $Y$ ;  $f_X(x)$ ,  $f_Y(y)$  – плотности распределения этих случайных величин. Из приведенного выражения следует, что  $MI(X, Y) = MI(Y, X)$ ; при независимости случайных величин  $X$  и  $Y$ ,  $MI(X, Y) = 0$ . Отметим, что прямое применение этого выражения для вычисления  $MI(X, Y)$  невозможно. Действительно, на практике, в лучшем случае, могут быть известны лишь плотности распределения отдельных случайных величин. Восстановить по ним совместную плотность нельзя. Поэтому приведенная формула для  $MI(X, Y)$  представляет лишь теоретическое определение этого параметра. Рабочий алгоритм для вычисления  $MI(X, Y)$ , по-видимому, можно получить при переходе от исходных реализаций случайных величин к их группированным статистическим рядам и после построения гистограмм случайных величин  $X$  и  $Y$ . Но при этом неизбежно будут внесены известные методические ошибки, связанные с искажением исходных данных. Таким образом,  $MI(X, Y)$  служит лишь еще одним параметром приближенной оценки линейной связи. В целом введение  $MI(X, Y)$  представляется нерациональным по двум причинам: высокой теоретической сложности его определения для персонала, связанного с обработкой ЭЭГ; наличия все той же линейной базы, лежащей в основе  $MI(X, Y)$ , со всеми ее известными недостатками. В этой связи нельзя согласиться со странным утверждением в [8, 9], что  $MI(X, Y)$  способна расширить область применения параметра  $r$  на нелинейный случай. Тем не менее,  $MI(X, Y)$  используется многими авторами при исследовании конкретных психофизиологических ситуаций.

В работе [11] при анализе данных ЭЭГ предложено применить, наряду с параметрами  $MI(X, Y)$  и  $r$ , коэффициенты ранговой корреляции Спирмена  $r_s$  и Кендалла  $r_k$ . Параметры  $r_s$  и  $r_k$  представляют собой варианты непараметрических коэффициентов корреляции, которые определяют уровни линейной связи и вычисляются по результатам сортировки выборочных данных. Авторы [11] считают необходимым сопоставлять между собой оценки, полученные с помощью использованных параметров, хотя при отсутствии истинного значения для уровня связи такое сопоставление нельзя считать информативным.

Среди публикаций можно встретить статьи с попытками обобщенно оценить уровень связи каждой из исследуемых областей мозга со всеми остальными областями. Так, в [12] при исследовании результатов обработки данных ЭЭГ больных

шизофренией ставится задача такого обобщения. Для получения результирующей оценки авторы предлагают простое усреднение всех параметров связи конкретной области с остальными. Признавая важность подобной задачи, с алгоритмом ее решения согласиться нельзя. Такой упрощенный подход может стать источником ошибок, порождает оценки с неопределенными свойствами и никак не согласуется с известными методами анализа множественных связей.

В ряде случаев делаются попытки создать новый параметр для оценки корреляционной связи. При этом авторы, без всяких обоснований, принимают достаточно серьезные предположения. Так в работе [13] предложен алгоритм получения некоего параметра связи двух процессов ЭЭГ. Вычисляется взаимная корреляционная функция (ВКФ), ее значение при нулевом сдвиге времени  $\tau$  делится на максимальную из двух дисперсий. Понятно, что получаемый таким путем параметр будет резко занижать оценку реальной связи. С другой стороны, ВКФ – в общем случае функция двух временных сечений, и лишь в предположении о стационарности и стационарной связанности процессов, она будет зависеть только от  $\tau$  [14]. К тому же этот громоздкий алгоритм может быть упрощен.

Наряду с работами линейного направления имеют место публикации [15, 16], в которых указывается на необходимость анализа связей ЭЭГ в рамках нелинейных моделей. Значимым результатом в этой области следует считать появление в [17] так называемого нелинейного коэффициента корреляции  $h^2$ . Этот новый параметр применялся в конкретных исследованиях, например, в [18, 19], получил обоснование в [20] и подробно описан в [21]. Коэффициент  $h^2$  представлен в этих работах выражением:

$$h^2 = \max_{\tau} \left[ 1 - \frac{z(x(t), \tau)}{\text{var}(y(t + \tau))} \right]; z(x(t), \tau) = \arg \min_g \left( E[y(t + \tau) - g(x(t))]^2 \right) \quad (*)$$

Здесь  $x(t)$ ,  $y(t)$  – временные ряды;  $\text{var}$  – дисперсия;  $\tau$  – сдвиг по времени;  $E$  – математическое ожидание;  $g(x(t))$  – регрессионное соотношение, представленное в виде кусочной аппроксимации.

Параметр  $h^2$  определен в упомянутых выше работах в форме, которая практически исключает получение алгоритма его вычисления. Громоздкость и теоретическая сложность выражений (\*) служат препятствием для осознанного творческого применения этого параметра практиками в области анализа данных ЭЭГ. Эти выводы усугубляются отсутствием описания свойств  $h^2$ , а также неопределенностью выбора  $\tau$ . Из (\*) следует, что рост значений  $\tau$  ведет к рассогласованности откликов  $y(t + \tau)$  и факторов  $x(t)$ , в результате чего снижается качество решения задачи регрессии и оценки уровня связи. Предварительный анализ показал, что при линейной модели связи и  $\tau = 0$ ,  $h^2 = r^2$ , т. е. параметр  $h^2$  принадлежит к классу корреляционных коэффициентов.

Заканчивая краткий аналитический обзор, отметим основные моменты текущего развития методов оценки связей в ЭЭГ:

- превалирующее распространение линейных методов с преобладающим применением коэффициента корреляции  $r$  в качестве основного, несмотря на отсутствие гарантий объективности получаемых оценок;
- учитывая бесперспективность и ограниченные возможности линейных методов анализа связей, практически отсутствуют подходы к анализу множественных связей, весьма важных при изучении мозга;
- по тем же причинам отсутствуют подходы к определению направленности связей и выбора их лучших моделей;
- предложенный нелинейный коэффициент корреляции  $h^2$ , ввиду его неопределенных свойств, отсутствия рекомендаций к практическому использованию и

высокой теоретической сложности, не может рассматриваться в качестве основного параметра при анализе нелинейных связей.

Эти вопросы нашли свое отражение в нижеследующем материале. В нем, с применением специальных разделов регрессионного и корреляционного анализа математической статистики, сопоставляются линейные и нелинейные подходы к изучению межканальных связей ЭЭГ, предлагается простой универсальный параметр для анализа парных и множественных связей.

### ИСХОДНЫЕ ПРЕДПОСЫЛКИ

Наличие совокупности синхронно опрашиваемых электродов, многомерность получаемых данных ЭЭГ и необходимость их совместной обработки предопределяют особенности возникающих задач.

Предположим, что данные ЭЭГ получены по  $m$  однотипным каналам на промежутке времени  $t_D$ . За это время данные каждого канала фиксируются на определенной частоте последовательностями по  $n$  значений в каждой, т. е., в результате ЭЭГ получается массив данных в виде  $(n \times m)$ -матрицы  $F$ .

Представление исходных данных в виде матриц  $F$  универсально, может использоваться при анализе данных ЭЭГ в статике, при изучении динамики изменения состояния пациента, при спектральных преобразованиях данных, при выделении из них диапазонов частот, биоритмов. Формат исходных данных в виде матрицы  $F$  делает простым переход от обработки всего массива на полном временном интервале  $t_D$  к обработке данных на коротких временных отрезках. Для этого необходимо лишь выбрать соответствующие строки этой матрицы. Так же удобно проводить анализ связей для локальной совокупности каналов ЭЭГ. При этом необходимо использовать лишь соответствующий набор столбцов матрицы  $F$ .

Описываемый ниже подход опирается на структуру матрицы  $F$ , поэтому может использоваться применительно к любой из упомянутых выше задач.

Изучение межканальных взаимодействий по данным ЭЭГ традиционно проводится путем анализа, так называемых, парных связей, т. е. связей между двумя каналами. Для  $m$ -канальной ЭЭГ имеет место  $m \cdot (m - 1)$  парных связей. При этом не учитываются возможные множественные связи между каналами. Для каждого из вариантов связей на практике может быть получено большое число различных параметров, которые составят совокупность индивидуальных показателей состояния пациента.

Теоретической основой изучения межканальных связей служит корреляционный и регрессионный анализ [14, 22], тесно связанные между собой. Первый из методов позволяет оценить уровень взаимозависимости двух (или более) каналов при различных законах (моделях) их связи. Вторым методом определяют вид и параметры этих моделей.

Следует отметить, что при анализе парных связей по данным ЭЭГ, в качестве параметра, без всяких обоснований, используют коэффициенты корреляции  $r$ . Однако хорошо известно [14], что область практического применения параметров  $r$  ограничена лишь линейными моделями. Это означает, что  $r$  можно использовать без риска искажения истинных свойств связи двух каналов (с измеренными значениями  $y$  и  $x$ ) только в случаях, когда для них справедливо уравнение вида:

$$y = a + b \cdot x, \quad (1)$$

где  $a$  и  $b$  – коэффициенты, подлежащие определению в задаче регрессии.

Соотношение (1) описывает весьма частный случай реальных связей, поэтому применение  $r$  в большинстве случаев приводит к ошибкам. Линейная модель (1) способна лишь весьма грубо охарактеризовать взаимозависимость каналов.

Для оценки уровней парных связей можно предложить другой параметр – корреляционное отношение  $R$  [14, 22]. Этот параметр, в отличие от  $r$ , способен

объективно характеризовать уровни связи при произвольных моделях, как линейных, так и нелинейных. В отличие от  $r$ , параметр  $R$  определяется только по результатам решения задачи регрессии.

Сущность этой задачи состоит в определении регрессионного соотношения (модели связи двух или более случайных величин), наилучшим образом соответствующего исходным данным. Простейшим регрессионным соотношением служит выражение (1), причем в этой записи  $y$  и  $x$  носят названия отклика и фактора соответственно.

Простым вариантом усложнения модели (1) является полином вида:

$$y = a + b \cdot x + c \cdot x^2, \quad (2)$$

где  $a$ ,  $b$  и  $c$  – коэффициенты, подлежащие определению.

Дальнейшими усложнениями регрессионных соотношений этой группы служат полиномы третьего и более высоких порядков, которые образуются добавлением в правую часть выражения (2) слагаемых с  $x^3$ ,  $x^4$  и т. д. Все варианты таких полиномов, за исключением (1), характеризуются нелинейной зависимостью отклика  $y$  от фактора  $x$ . Таким образом, модель (1) – линейная, остальные модели группы – нелинейные.

Вся полиномиальная группа выражений типа (1) и (2) образует множество линейных задач регрессии, поскольку отклик  $y$  линейно зависит от искомым коэффициентов ( $a$ ,  $b$ ,  $c$  и др.) этих выражений. Известно также, что любая линейная задача регрессии может быть решена методом наименьших квадратов (МНК).

При вычислении корреляционного отношения используется один из результатов решения задачи регрессии алгоритмом МНК. Поэтому приведем основные соотношения этого алгоритма, пользуясь его формой из работы [22].

Пусть анализируется связь двух каналов, данные ЭЭГ по которым находятся в двух соответствующих столбцах матрицы  $\mathbf{F}$ . При этом, один из столбцов содержит данные отклика  $y_i$ , другой – фактора  $x_i$ . Тогда, для каждой  $i$ -ой пары отклик-фактор, согласно, например, модели (2), имеем:

$$y_i = a + bx_i + c(x_i)^2 = \begin{bmatrix} 1 & x_i & (x_i)^2 \end{bmatrix} \boldsymbol{\beta} = \mathbf{a}_i \cdot \boldsymbol{\beta}; i = 1, 2, \dots, n \quad (3)$$

Здесь:  $\mathbf{a}_i$  –  $i$ -ая строка вспомогательной матрицы  $\mathbf{A}$ ;  $\boldsymbol{\beta}$  – вектор искомым коэффициентов, для полинома (2) имеющий вид  $\boldsymbol{\beta} = [a \ b \ c]^T$ ;  $T$  – символ операции транспонирования. Для всех  $n$  уравнений (3) получаем:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta} \quad (4)$$

где  $\mathbf{Y}$  –  $(n \times 1)$ -вектор откликов с элементами  $y_i$ ; вспомогательная матрица  $\mathbf{A}$  состоит из строк  $\mathbf{a}_i$  и для модели (2) имеет размерность  $(n \times 3)$ .

В процессе решения задачи регрессии последовательно определяются: вектор оценок искомым коэффициентов  $\boldsymbol{\beta}_0$ , вектор  $\mathbf{Y}_0$  оценок откликов, остаточная сумма квадратов  $\varepsilon$  и остаточная дисперсия  $d$ :

$$\boldsymbol{\beta}_0 = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{Y}; \mathbf{Y}_0 = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\beta}_0; \mathbf{e} = \mathbf{Y} - \mathbf{Y}_0; \varepsilon = \mathbf{e}^T \cdot \mathbf{e}; d = \varepsilon / n \quad (5)$$

Определение  $d$  в (5) позволяет получить корреляционное отношение  $R$ :

$$R^2 = 1 - \frac{d}{\sigma_{y\bar{e}}^2}; 0 \leq r^2 \leq R^2 \leq 1 \quad (6)$$

где  $\sigma_{y\bar{e}}^2$  – выборочная дисперсия откликов.

При использовании алгоритма (5) для каждой конкретной модели, величины  $\varepsilon$  и  $d$  будут достигать своих минимальных значений. В этом смысле говорят о получении наилучшего решения задачи регрессии, а, следовательно, и варианта модели связи. Учитывая зависимость  $R$  от  $d$ , из (6) следует, что это наилучшее решение реализуется

при максимальном значении  $R$ . Поэтому корреляционное отношение  $R$ , наряду с  $\varepsilon$  и  $d$ , может служить критерием качества моделей при их сопоставлении. Модель связи, имеющая максимальное значение  $R$ , будет наилучшей среди сопоставляемых вариантов, как наиболее соответствующая исходным данным.

Дополнительно отметим, что корреляционное отношение может служить индикатором отличия модели связи от варианта (1). Так, при  $R = |r|$  имеем линейную модель (1); в случае  $R > |r|$  модель связи – нелинейная.

## РЕЗУЛЬТАТЫ

В процессе подготовки данного материала авторами было разработано несколько программ в среде Mathcad, позволяющих вести обработку данных реальных ЭЭГ. Две из этих программ, называемые далее программами 1 и 2, размещены на портале MAS.Exponenta.ru [23] в рубрике «Математика\Математика в приложениях». Портал содержит интерактивные ресурсы по многим разделам математики и теории систем. Он обеспечивает возможность решения задач в режиме свободного доступа. Приведем некоторые результаты работы этих программ в виде копий из Mathcad-файлов.

В качестве исходных использовались данные реальной ЭЭГ, матрица  $F$  для которых имеет параметры:  $m = 16$ ,  $n = 11486$ ,  $t_D = 45.22$  с. Расчеты проводились при  $t_D = 45$  с.

В программе 1 решаются задачи регрессии для моделей (1) и (2). Предварительно задаются: интервал времени в пределах  $t_D$ ; номера двух каналов с указанием того, данные какого из них – фактор, а какого – отклик. Выводятся результирующие графики и значения  $R$ ,  $r$ ,  $\beta$ .

На рисунке 1 приведены графические результаты решения двух задач регрессии для полиномов первого (1) и второго (2) порядков. В качестве фактора и отклика использованы каналы 10 и 8 соответственно (вариант 1).

На графиках (см. рис. 1) точками изображены исходные данные – зависимости отклик-фактор. Пунктирной и сплошной линиями представлены оценки откликов (элементы векторов  $Y_0$ ) для моделей (1) и (2) соответственно в зависимости от тех же факторов. Для принятого варианта отклик-фактор, графики, полученные для двух различных моделей, имеют схожий характер. Судя по модели (1), данные каналов 8 и 10 связаны отрицательной корреляционной зависимостью. Количественные результаты решения (вариант 1) подтверждают эти предварительные выводы:

- модель (1):  $R = 0.456$ ;  $r = -0.456$ ;  $\beta = [0.002 \quad -0.551]^T$ ;
- модель (2):  $R = 0.464$ ;  $r = -0.456$ ;  $\beta = [0.309 \quad -0.552 \quad -0.013]^T$ .

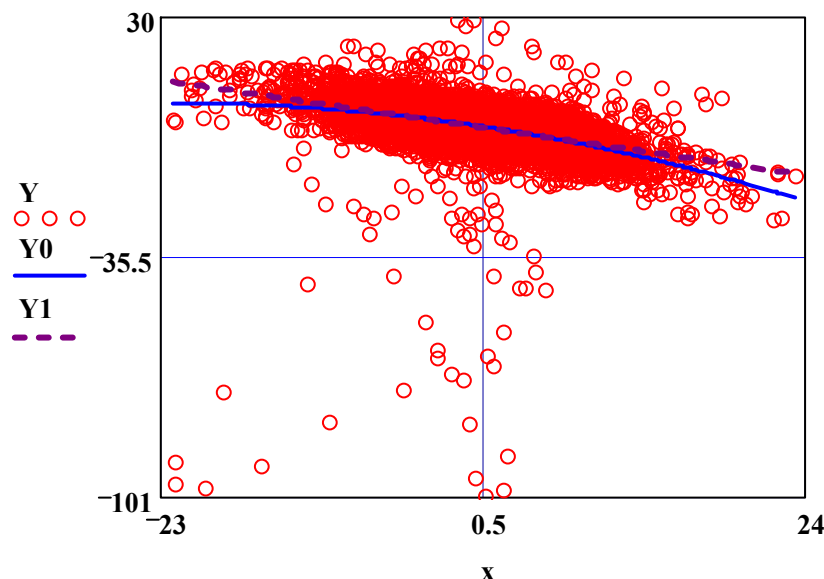


Рис. 1. Графики результатов задач регрессии (вариант 1).

Значение  $R$ , как критерия, для модели (2) несколько превышает значение этого параметра для модели (1). Поэтому, для варианта 1 модель (2) имеет небольшое преимущество.

Важно отметить, что любая модель связи, полученная в результате решения задачи регрессии, может быть подвергнута процедуре дальнейшего уточнения. Для этого можно использовать два пути.

Один из них связан с усложнением первоначально выбранного регрессионного соотношения. Его усложнение неизбежно приведет к снижению значений  $d$ ,  $\varepsilon$  и, как следствие, к росту значения  $R$ . Это можно было наблюдать ранее, поскольку модель (2) является одним из вариантов усложнения модели (1). Процедура усложнения многовариантна, но не бесконечна. В какой-то момент дальнейшие усложнения перестанут сопровождаться заметными изменениями параметров  $R$ ,  $d$ ,  $\varepsilon$ , что даст основание для выбора окончательного варианта модели.

Для нелинейных ( $R > |r|$ ) моделей связи существует еще одна возможность уточнения, связанная с заменой реализации-фактор на реализацию-отклик и наоборот. Такая замена для нелинейных моделей неизбежно вызовет изменение значений  $d$ ,  $\varepsilon$ ,  $R$  в результате решения задачи регрессии. Выбор варианта с максимальным значением  $R$  служит заключительным этапом определения наилучшей модели связи. При этом будет автоматически разрешена неопределенность, связанная с выбором того, данные какого канала отнести к отклику, а какого – к фактору.

Применим этот подход к массиву данных, рассмотренному ранее. Для тех же моделей (1) и (2) в качестве фактора и отклика используем теперь данные каналов 8 и 10 соответственно (вариант 2). На рисунке 2 приведены графики по результатам решения задач регрессии для этого случая. Из рисунка 2 следует, что оценка отклика для модели (1), естественно, сохраняет характер изменения, полученный ранее в варианте 1, поскольку значение  $r$  не меняется при смене мест в паре фактор-отклик.

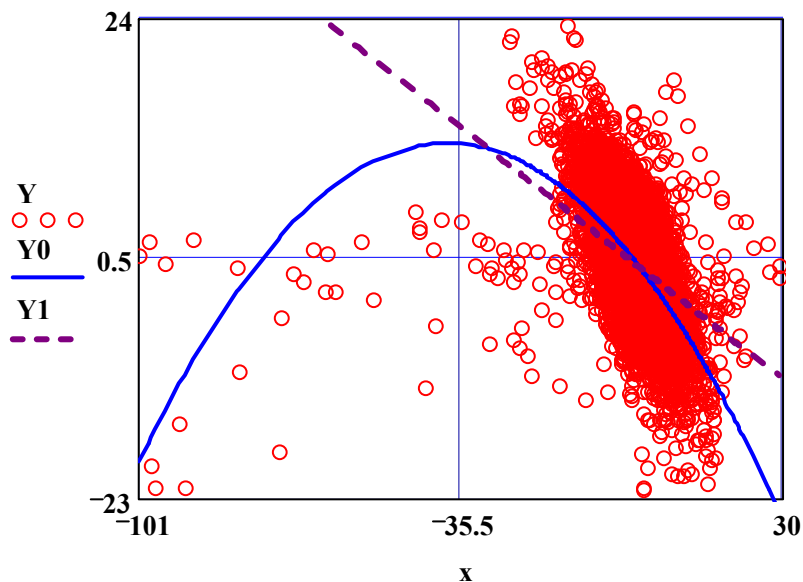


Рис. 2. Графики результатов задач регрессии (вариант 2).

График кривой оценки отклика для модели (2) в варианте 2 приобрел более сложный вид по сравнению с рисунком 1.

Результатами решения задач регрессии в варианте 2 служат:

- модель (1):  $R = 0.456$ ;  $r = -0.456$ ;  $\beta = [0.014 \quad -0.377]^T$ ;
- модель (2):  $R = 0.597$ ;  $r = -0.456$ ;  $\beta = [0.293 \quad -0.604 \quad -0.008]^T$ .

Поскольку значение  $R = 0.597$  превышает  $R = 0.464$ , полученное в варианте 1, то в качестве окончательной модели связи каналов 8 и 10 выбирается модель (2) вида:

$$y = 0.293 - 0.604 \cdot x - 0.008 \cdot x^2 \quad (7)$$

причем, откликами  $y$  служат данные канала 10, факторами  $x$  – канала 8.

При анализе моделей парных связей целесообразно использовать матрицы корреляционных отношений  $\mathbf{R}$  и коэффициентов корреляции  $\mathbf{r}$ .

Обе эти матрицы имеют размерность  $(m \times m)$ , где, как и ранее,  $m$  – число каналов (столбцов матрицы  $\mathbf{F}$ ). Диагональные элементы матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  содержат единицы. Вне диагонали матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  расположены значения  $R_{ij}$  и  $r_{ij}$  соответственно ( $i \neq j$ ), причем в общем случае  $R_{ij} \neq R_{ji}$  и  $r_{ij} = r_{ji}$ . Поэтому в общем случае матрица  $\mathbf{R}$  несимметричная, матрица  $\mathbf{r}$  – симметричная. Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  интегрируют показатели связи всех  $m(m - 1)$  пар каналов.

Матрицы  $\mathbf{R}$  формируются в условии априорного предположения о том, что все пары каналов связаны нелинейно. Для этого задается один из нелинейных вариантов регрессионного соотношения, например, выражение (2). Полученные в результате решения  $m(m - 1)$  задач регрессии значения элементов матрицы  $\mathbf{R}$  дают полную информацию о наличии линейных (для них  $R_{ij} = R_{ji}$ ) и нелинейных связей ( $R_{ij} \neq R_{ji}$ ) между парами каналов. Сопоставлением  $R_{ij}$  и  $R_{ji}$  легко определяется лучший вариант нелинейной модели и распределение факторов-откликов в таких парах каналов.

Для получения матриц  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  предназначена программа 2 [23]. В ней изначально задается интервал времени в пределах  $t_D$ . Дополнительно, в обеспечение анализа связей в локальной группе каналов, предусмотрено задание номеров каналов группы. Выводятся  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ , причем формирование этих матриц выполнено в программе 2 так, что в обозначении их элементов индекс строки связан с фактором, а индекс столбца – с откликом.

На рисунке 3 приведены матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$ , полученные по программе 2 [23] для того же исходного массива данных ЭЭГ, который использован выше.

$\mathbf{R} =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>0.258</td><td>0.597</td><td>0.398</td></tr> <tr><td>0.19</td><td>9</td><td>0.355</td><td>0.472</td></tr> <tr><td>0.464</td><td>0.349</td><td>10</td><td>0.511</td></tr> <tr><td>0.35</td><td>0.438</td><td>0.511</td><td>11</td></tr> </table>	8	0.258	0.597	0.398	0.19	9	0.355	0.472	0.464	0.349	10	0.511	0.35	0.438	0.511	11
8	0.258	0.597	0.398														
0.19	9	0.355	0.472														
0.464	0.349	10	0.511														
0.35	0.438	0.511	11														

$\mathbf{r} =$	<table border="1" style="border-collapse: collapse; text-align: center;"> <tr><td>8</td><td>-0.177</td><td>-0.456</td><td>0.345</td></tr> <tr><td>-0.177</td><td>9</td><td>0.347</td><td>-0.438</td></tr> <tr><td>-0.456</td><td>0.347</td><td>10</td><td>-0.511</td></tr> <tr><td>0.345</td><td>-0.438</td><td>-0.511</td><td>11</td></tr> </table>	8	-0.177	-0.456	0.345	-0.177	9	0.347	-0.438	-0.456	0.347	10	-0.511	0.345	-0.438	-0.511	11
8	-0.177	-0.456	0.345														
-0.177	9	0.347	-0.438														
-0.456	0.347	10	-0.511														
0.345	-0.438	-0.511	11														

Рис. 3. Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  для группы каналов.

Матрицы  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  (см. рис. 3) получены в рамках моделей (2) и (1) соответственно. В целях экономии места, эти матрицы приведены для группы каналов (с 8 по 11). Единицы в диагоналях  $\mathbf{R}$  и  $\mathbf{r}$  заменены номерами каналов для удобства работы с элементами этих матриц.

Анализируя недиагональные элементы матрицы  $\mathbf{R}$  рисунка 3, можно выявить особенности связей всех 12 пар каналов группы. Так, для каналов 8 и 10, которые обсуждались ранее, имеем:  $R_{10,8} = 0.464$ ,  $R_{8,10} = 0.597$ . Преобладает элемент  $R_{8,10}$ , откуда сразу следует вывод, что предпочтительной моделью связи этих каналов служит полином (2), причем данные канала 10 выступают в качестве отклика  $y$ .

В матрице  $\mathbf{R}$  (см. рис. 3) можно заметить и равенство элементов  $R_{ij}$  и  $R_{ji}$ , например,  $R_{11,10} = R_{10,11} = 0.511$ . Подобные равенства – свидетельства линейных связей каналов. Знак этой связи следует из соответствующего элемента матрицы  $\mathbf{r}$ .

Следует отметить также, что анализ матриц  $\mathbf{R}$  часто позволяет выявить множественные связи каналов, которые ранее не рассматривались исследователями и практиками в области обработки данных ЭЭГ. Множественные связи относятся к



случаям, когда столбцы матрицы  $\mathbf{R}$  содержат по несколько преобладающих элементов. В нашем примере (см. рис. 3) это касается элементов  $R_{8,10} > R_{10,8}$  и  $R_{9,10} > R_{10,9}$ .

Таким образом, десятый канал имеет несколько влияющих на него факторов и, в этом смысле, может быть назван доминирующим каналом, а связанная с ним корковая зона – доминирующей зоной. Количественные оценки уровней доминирования каналов могут быть даны путем решения задач множественной регрессии и определения сводных и частных коэффициентов корреляции [14, 22].

Проблема множественных связей, доминантных каналов (зон) заслуживает отдельного детального исследования.

## ВЫВОДЫ

В статье предложен новый подход к анализу свойств взаимосвязей каналов ЭЭГ на основе объективных параметров – корреляционных отношений, которые, в отличие от коэффициентов корреляции, могут использоваться и при нелинейных моделях связи.

Отмечается, что использование коэффициентов корреляции без достаточных оснований чревато появлением ошибок, неправильных выводов и суждений в любой прикладной задаче, в том числе, при обработке данных ЭЭГ. Так, например, попытка найти наиболее коррелированную пару каналов ЭЭГ по матрице  $r$  из группы (см. рис. 3), приводит к ложному выводу, что это каналы 10 и 11 ( $|r_{10,11}| = 0.511$ ). В действительности – это каналы 8 и 10, поскольку  $R_{8,10} = 0.597$ . Возможны также ситуации, когда по оценкам коэффициентов корреляции связь считается практически отсутствующей ( $|r| < 0.05$ ), хотя, по данным корреляционных отношений, она значительная ( $R > 0.7$ ), но нелинейная. Кроме того, по оценкам коэффициентов корреляции невозможно определить направленность связи, в то время как, по данным корреляционных отношений, эта направленность при нелинейной связи определяется однозначно.

Показано, что предложенная матрица корреляционных отношений служит необходимой основой выбора лучших вариантов моделей связи, средством индикации их нелинейности, что принципиально недостижимо на основе коэффициентов корреляции. Матрица корреляционных отношений открывает новые возможности анализа множественных связей каналов ЭЭГ, выявления и исследования доминантных каналов (корковых зон).

Суждения относительно коэффициентов корреляции могут быть отнесены к любым другим параметрам линейной группы.

Имеющиеся в статье рекомендации могут использоваться в других многоканальных измерительных системах.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Vega-Zelaya L., Garnés-Camarena O., Sanz-García A., Ortega G. J., Pastor J. *Mathematical Foundations of Quantified Electroencephalography*. 2016.
2. Cover K.S., Stam C.J., van Dijk B.W. Detection of very high correlation in the alpha band between temporal regions of the human brain using MEG. *Neuroimage*. 2004. V. 22. № 4. P. 1432-1437.
3. Bartolomei F., Bosma I., Klein M., Baayen J.C., Reijneveld J.C., Postma T.J., Heimans J.J., van Dijk B.W., de Munck J. C., de Jongh A. How do brain tumors alter functional connectivity? A magnetoencephalography study. *Annals of neurology*. 2006. V. 59. № 1. P. 128-138.
4. Roosendaal S.D., Hulst H.E., Vrenken H., Feenstra H.E., Castelijns J.A., Pouwels P.J., Barkhof F., Geurts J.J. Structural and Functional Hippocampal Changes in Multiple Sclerosis Patients with Intact Memory Function 1. *Radiology*. 2010. V. 255. № 2. P. 595-604.

5. Angelopoulos E., Koutsoukos E., Maillis A., Papadimitriou G.N., Stefanis C. Cortical interactions during the experience of auditory verbal hallucinations. *The Journal of neuropsychiatry and clinical neurosciences*. 2011. V. 23. № 3. P. 287-293.
6. Kalauzi A., Vuckovic A., Bojić T. EEG alpha phase shifts during transition from wakefulness to drowsiness. *International journal of psychophysiology*. 2012. V. 86. № 3. P. 195-205.
7. Ramakrishnan A.G., Satyanarayana J.V. Reconstruction of EEG from limited channel acquisition using estimated signal correlation. *Biomedical Signal Processing and Control*. 2016. V. 27. P. 164-173.
8. Alonso J.F., Mananas M.A., Romero S., Hoyer D., Riba J., Barbanoj M.J. Drug effect on EEG connectivity assessed by linear and nonlinear couplings. *Human brain mapping*. 2010. V. 31. № 3. P. 487-497.
9. Cruz A.V., Mallet N., Magill P.J., Brown P., Averbek B.B. Effects of dopamine depletion on information flow between the subthalamic nucleus and external globus pallidus. *Journal of neurophysiology*. 2011. V. 106. № 4. P. 2012-2023.
10. Ventouras E.C., Margariti A., Chondraki P., Kalatzis I., Economou N.T., Tsekou H., Paparrigopoulos T., Ktonas P. EEG-based investigation of brain connectivity changes in psychotic patients undergoing the primitive expression form of dance therapy: a methodological pilot study. *Cognitive neurodynamics*. 2015. V. 9. № 2. P. 231-248.
11. Bonita J.D., Ambolode II L.C.C., Rosenberg B.M., Cellucci C.J., Watanabe T.A.A., Rapp P.E., Albano A.M. Time domain measures of inter-channel EEG correlations: a comparison of linear, nonparametric and nonlinear measures. *Cognitive neurodynamics*. 2014. V. 8. № 1. P. 1-15.
12. Lynall M.E., Bassett D.S., Kerwin R., McKenna P.J., Kitzbichler M., Muller U., Bullmore E. Functional connectivity and brain networks in schizophrenia. *The Journal of Neuroscience*. 2010. V. 30. № 28. P. 9477-9487.
13. Сахаров В.Л., Андреев А.С. Методы математической обработки электроэнцефалограмм: учебное пособие. Таганрог: Антон, 2000. 44 с.
14. Амосова Н.Н., Куклин Б.А., Макарова С.Б., Максимов Ю.Д., Митрофанова Н.М., Полищук В.И., Шевляков Г.Л. *Вероятностные разделы математики*. Под ред. Максимова Ю.Д. СПб: Иван Федоров, 2001. 588 с.
15. Jeong J., Kim D.J., Chae J.H., Kim S.Y., Ko H.J., Paik I.H. Nonlinear analysis of the EEG of schizophrenics with optimal embedding dimension. *Medical engineering & physics*. 1998. V. 20. № 9. P. 669-676.
16. Meyer-Lindenberg A., Bauer U., Krieger S., Lis S., Vehmeyer K., Schüler G., Gallhofer B. The topography of non-linear cortical dynamics at rest, in mental calculation and moving shape perception. *Brain topography*. 1998. V. 10. № 4. P. 291-299.
17. da Silva F.L., Pijn J.P., Boeijinga P. Interdependence of EEG signals: linear vs. nonlinear associations and the significance of time delays and phase shifts. *Brain topography*. 1989. V. 2. № 1-2. P. 9-18.
18. Wendling F., Bartolomei F., Bellanger J.J., Chauvel P. Interpretation of interdependencies in epileptic signals using a macroscopic physiological model of the EEG. *Clinical neurophysiology*. 2001. V. 112. № 7. P. 1201-1218.
19. Ansari-Asl K., Senhadji L., Bellanger J.J., Wendling F. Quantitative evaluation of linear and nonlinear methods characterizing interdependencies between brain signals. *Physical Review E*. 2006. V. 74. № 3. P. 031916.
20. Kalitzin S.N., Parra J., Velis D.N., da Silva, F.L. Quantification of unidirectional nonlinear associations between multidimensional signals. *IEEE transactions on biomedical engineering*. 2007. V. 54. № 3. P. 454-461.

21. Wendling F., Ansari-Asl K., Bartolomei F., Senhadji L. From EEG signals to brain connectivity: a model-based evaluation of interdependence measures. *Journal of neuroscience methods*. 2009. V. 183. № 1. P. 9-18.
22. Ивановский Р.И. *Теория вероятностей и математическая статистика. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad*. СПб: БХВ, 2008. 528 с.
23. *MAS.Exponenta.ru*. URL: <http://mas.exponenta.ru/> (accessed 20.10.2016).

Рукопись поступила в редакцию 18.07.2016, переработанный вариант поступил 07.09.2016.  
Дата опубликования 25.10.2016.