Фрагменты статьи
Ивановский Р.И. Проблемы чувствительности в задачах моделирования, обработки информации и управления // Гироскопия и навигация № 1 (72), 2011. с. 90–104 .

Чувствительность в анализе и синтезе систем управления (СУ)

Как СОИ, так и СУ являются динамическими системами, описываются дифференциальными или разностными уравнениями, создаются на основе РМ и функционируют в действительных условиях. По этой причине большая часть того, что было описано применительно к СОИ может быть повторено и для СУ. Однако для СУ в понятие качества управления, наряду с точностью, на первый план выступает устойчивость. Это определяет известную особенность анализа СУ. Поэтому, не повторяя отмеченные выше аспекты приложения теории чувствительности к СУ, остановимся здесь лишь на некоторых аспектах анализа ф.ч. для обоснования упрощения регуляторов при их технической реализации. Идеи и выводы такого анализа могут быть наиболее полно раскрыты при анализе линейных СУ, поскольку при этом возможен аналитический подход. Нижеследующий материал будет рассматривать линейные одномерные и многомерные системы управления. В процессе анализа будет определена неразрывная связь анализа чувствительности с анализом СУ на грубость.

На рис. 6 приведена традиционная структура СУ с задающими сигналами λ, возмущениями β и выходными переменными y; H и R — передаточные функции (одномерные системы) или передаточные матрицы (многомерные СУ) объекта управления и регулятора.

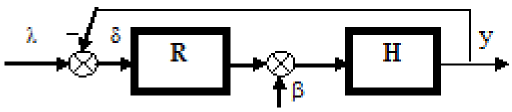

Рис. 6. Структура СУ

Результатом любого подхода (аналитического или численного) к синтезу многомерных или одномерных систем служат переходные характеристики (п.х) или передаточные функции (п.ф.) звеньев управляющей части СУ. Требования технической реализациивызывают необходимость упрощения полученных п.ф.и/или аппроксимации п.х.Такие упрощения неизбежно связаны с исключением некоторых звеньев из структуры регулятора, с параметрическими вариациями этих звеньев.

В общем случае необходимо обосновывать возможность и допустимость конкретных упрощений эталонных (полученных в результате синтеза) вариантов и вариаций их параметров.. Предварительный анализ этих проблем показал, что такое обоснование можно получить методами теории чувствительности.

Структурные и/или параметрические вариаций динамической системывызывают дополнительное движение (типа (1)), изменение свойств системы относительно исходного (или заданного, желаемого).

При анализе вариантов регуляторов для последующей реализации в первую очередь необходимо ответить на три вопроса:

1. Возможно ли структурное упрощение регуляторов, вызванное исключением отдельных звеньев и/или аппроксимацией переходных характеристик звеньев;
2. Возможны ли параметрические вариации эталонных или упрощенных регуляторов (необходимые признаки грубости СУ);
3. Какие алгоритмы управления могут быть реализованы.

Термин «возможно» в этих вопросах и ниже предполагает выяснение возможности изменений без потери системой устойчивости.

Рассмотрим эти вопросы для одномерных и многомерных систем, естественно предполагая, что синтезированная (исходная) СУ устойчива.

Одномерные системы. П.ф. замкнутой СУ (рис. 6) имеет вид:

$$W(p) = y(p)/\lambda(p) = [1 + H(p)R(p)]^{-1}H(p)R(p). \qquad (16)$$

Ее п.х. $h(p) = W(p)/p$, как реакция системы на единичное ступенчатое воздействие $\lambda^0(p) = 1/p$, служит исчерпывающей основой для анализа качества и устойчивости реакций замкнутой системы. Обозначая $W(p)$ (16) при эталонном регуляторе как $W(R)$, разложим эту функцию в ряд Тэйлора по степеням вариаций R, ограничивая сь членами первого порядка:

$$W(R + \Delta R) = W(R) + [\partial W(R) / \partial(R)](\Delta R) = W(R) + [S(R)](\Delta R). \qquad (17)$$

Выражение (17) определяет возможность структурного упрощения полученного регулятора. Действительно, если первое слагаемое $W(R)$ в этом выражении является п.ф. эталонной системы, устойчивой по условиям синтеза, то устойчивость второго слагаемого будет определяться видом ф.ч.$S(R)$ и принимаемым вариантом структурной вариации ΔR. В общем случае на основании (17) могут быть сделаны положительные выводы о возможности вариаций и структурного упрощенияR, если:

•ф.ч.$S(R)$ и вариация ΔR по отдельности — передаточные функции устойчивых звеньев (далее такие п.ф. будем называть устойчивыми п.ф.);

•произведение ф.ч.$S(R)$ на ΔR, т. е. $S(R)\Delta R$—устойчивая п.ф..

Ф.ч.$S(R)$ для рассматриваемого случая имеет вид:

$$S(R) = H(p) / [1 + H(p)R(p)]^2. \qquad (18)$$

В силу исходной устойчивости СУ, полюса п.ф.$W(p) = W(R)$ (т. е. — нули п.ф.$[1 + H(p)R(p)]$) расположены в левой полуплоскости комплексной плоскости. Отсюда следует, что выражение (18) для ф.ч. соответствует устойчивой п.ф., поскольку эта функция имеет полюса исходной (не варьированной) системы. Это позволяет сделать несколько очевидных утверждений.

Утверждение 1. Устойчивость ф.ч. (18) свидетельствует, что д**ля любых** вариантов регуляторов R, полученных в результате синтеза, возможны упрощения путем параметрических (структурных) вариаций ΔR, касающихся устойчивых звеньев в составе эталоннойп.ф.$R(p)$.

Так, например, если п.ф. регулятора $R(p)$ может быть представлена суммой нескольких апериодических (устойчивых) звеньев и интегратора (неустойчивого звена), то в силу утверждения 1 вариациям могут быть подвергнуты апериодические (устойчивые) звенья, т. е. вариация $\Delta R(p)$ должна быть устойчивой п.ф.. Но в общем случае подобные вариации могут вызвать статизм замкнутой системы.

Утверждение 2. При вариации устойчивых составляющих в структуре $R(p)$ астатизм замкнутой СУ сохраняется в том случае, если полином числителя ф.ч.$S(R1)$ (18) будет иметь хотя бы один нулевой корень.

Среди звеньев, входящих в структуру эталонной п.ф.$R(p)$, могут присутствовать и неустойчивые, например, интегрирующие звенья, часто встречающиеся при синтезе астатических систем. Для ответа на вопрос, можно ли варьировать и неустойчивые звенья (например, менять коэффициент усиления интеграторов), ответа для общего случая дать нельзя, поскольку такая возможность существенным образом зависит от конкретных параметров и структуры СУ. Единственным утверждением, которое можно сделать применительно к возможности вариаций неустойчивых звеньев в структуре эталонного$R(p)$, является следующее.

Утверждение 3. Возможность вариации неустойчивых звеньев в составе $R(p)$ определяется устойчивостью п.ф.$[S(R)](\Delta R)$, образованной произведением функции чувствительности и вариации ΔR.

Подобный случай может включать, например, структуру регулятора, состоящего из суммы апериодических звеньев и интегратора k/p. Вариация Δk коэффициента усиления k интегратора возможна в том случае, если ф.ч.$S(R)$ будет иметь хотя бы один нулевой ноль. Тогда произведение $S(R)$ на вариацию $\Delta R(p) = \Delta k/p$ образует устойчивую передаточную функцию. Более того, если $R(p)$ имеет интегратор, то вариация его коэффициента не нарушает астатизм замкнутой системы. В этом легко убедиться, рассматривая полиномиальные формы представления $H(p)$, $R(p)$:$H(p) = a(p) / b(p)$;$R(p) = c(p)/d(p)$, для которых ф.ч.$S(R)$ (18) принимает вид:

$$S(R) = a(p)b(p)[d(p)]^2 / [b(p)d(p) + a(p)c(p)]^2.$$

При наличии интегратора в $R(p)$ числитель $S(R)$ будет иметь множитель p^2, что при $\Delta R(p) = \Delta k/p$ обеспечит нулевой установившийся уровень переходной характеристике $[S(R)](\Delta R)/p$.

С примерами, подтверждающими сделанные выводы, можно ознакомиться в[12], раздел «Теория регулирования/Одномерные системы», где размещены интерактивные ресурсы автора.

Многомерные системы.Передаточная матрица замкнутой многомерной СУ (МСУ), согласно схеме рис. 6, имеет вид [13]:

$$\mathbf{W}(\boldsymbol{p}) = \mathbf{y}(\boldsymbol{p})/\boldsymbol{\lambda}(\boldsymbol{p}) = [\mathbf{E} + \mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p)]^{-1}\mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p). \tag{19}$$

Здесь $\mathbf{E}$ — единичная матрица.

Также как и для одномерного случая, реакции МСУ на единичные воздействия $\lambda_\Sigma^0(p) = \mathbf{E}_n/p$($\lambda_\Sigma^0$ — $(n\times n)$-матрица, $\mathbf{E}_n$ — единичная матрица порядка n, где n — число основных каналов МСУ), т.е. матрица ее переходных характеристик $\mathbf{h}(p) = \mathbf{W}(p)/p$служит исчерпывающей основой для анализа качества и устойчивости реакций замкнутой системы. Устойчивость МСУ (19) определяется [13] числителем $s(p)$ определителя матрицы $[[\mathbf{E} + \mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p)]$, выступающим в роли характеристического полинома таких динамических систем. Полином $s(p)$ присутствует в выражениях для каждого элемента матрицы $\mathbf{W}(p)$. Поэтому анализ устойчивости может проводиться на основе как отдельных элементов $\mathbf{W}(p)$, так и их линейных форм, например, .следа матрицы $\mathbf{W}(p)$.При анализе чувствительности МСУ целесообразно выбрать именно вариант $\mathrm{sp}[\mathbf{W}(p)]$, поскольку аппарат дифференцирования следа матриц по вектору или матрице хорошо разработан. Известные формулы для таких преобразований следа можно найти в [14].Эти формулы включают варианты дифференцирования следа отдельных матриц, произведений и суммы произведений матриц. Однако в данном случае, для дифференцирования следа матрицы $\mathbf{W}(p)$ (19) по матрице $\mathbf{R}(p)$требуются формулы дифференцирования следа обратных матриц. Такие формулы были получены автором [12, рубрика Математика/Линейная алгебра/След матрицы.], однако в данном материале их вывод не приводится ввиду весьма большой громоздкости выкладок. Опуская вывод, приведем лишь одну из таких формул, которая необходима для анализа чувствительности МСУ (19) в данной постановке. Так, матрица ф.ч. МСУ [19]

$$\mathbf{S}(\mathbf{R}) = \partial \mathrm{sp}[\mathbf{W}(\mathbf{R})] / \partial(\mathbf{R}) = \{[[\mathbf{E} + \mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p)]^{-2} \cdot \mathbf{H}(p)\}^{T}. \quad (20)$$

где $\mathbf{W}(\mathbf{R})$ — матрица$\mathbf{W}(p)$(19) МСУ при эталонном регуляторе $\mathbf{R}(p)$.

Учитывая (20), разложениеследа$\mathbf{W}(\mathbf{R})$в ряд Тэйлора по степеням вариаций $\mathbf{R}$, ограничиваясь членами первого порядка примет вид:

$$\mathrm{sp}[\mathbf{W}(\mathbf{R} + \Delta\mathbf{R})] = \mathrm{sp}[\mathbf{W}(\mathbf{R})] + \mathrm{sp}[\mathbf{S}(\mathbf{R})\cdot(\Delta\mathbf{R})] = \mathrm{sp}[\mathbf{W}(\mathbf{R}) + \mathbf{W}(\Delta\mathbf{R})]. \quad (21)$$

Здесь $\mathbf{W}(\Delta\mathbf{R}) = \mathbf{S}(\mathbf{R})\cdot\Delta\mathbf{R}$— матрица вариаций свойств МСУ (дополнительное движение, вызванное вариациями $\Delta\mathbf{R}(p)$).

Анализ матриц $\mathbf{S}(\mathbf{R})$ и $\mathbf{W}(\Delta\mathbf{R})$показал, что возможности структурного упрощения многомерныхрегуляторов$\mathbf{R}(p)$ в МСУ в целом аналогичны описанным выше для одномерных систем. Это сходство опирается на очевидную устойчивость передаточной матрицы чувствительности (20) для исходно устойчивой МСУ (19). Также как и для одномерных систем, при анализе МСУ могут быть сформулированы утверждения, приведенные выше. При этом очевидно, что возможность вариации параметров и структуры СУ (и МСУ) тесно связано с устойчивостью соответствующих функций чувствительности.

С примерами упрощения многомерных регуляторов можно ознакомиться в ресурсах автора [12], рубрика«Теория регулирования/Многомерные системы»; там же приведены ресурсы, подтверждающие справедливость выводов применительно к МСУ.

Литература

12. http://mas.exponenta.ru/

13. Ивановский Р.И., Нестеров А.В. Синтез многомерных систем управления. Проблема устойчивости. // Тр. Междунар. конф. по мягким вычислениям и измерениям (SCM'2005). СПб, 2005.

14. Ивановский Р.И. Теория вероятностей и математической статистики. Основы, прикладные аспекты с примерами и задачами в среде Mathcad. — СПб.: БХВ, 2008. –528 с.