СИНТЕЗ МНОГОМЕРНЫХ СИСТЕМ УПРАВЛЕНИЯ. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ

Р. И. Ивановский, А.В.Нестеров

СПбГПУ, Факультет технической кибернетики, Кафедра распределенных вычислений и компьютерных сетей

Abstract A task of creating a Multivariable Control System (MCS) with demanded dynamical properties is being solved. The basic approach of solving such sort of tasks is presented and an example of restrictions of demanded dynamical properties of a system which guarantee its stability is given.

Многомерные системы управления (МСАУ) имеют чрезвычайно широкое распространение в различных областях техники. Они характеризуются рядом особенностей, существенно затрудняющих анализ и синтез применительно к прикладным задачам. К «неприятным» особенностям МСАУ относят их сложность при большом числе каналов, высокий порядок соответствующих диф-ференциальных уравнений, а также трудности определения структуры регуляторов и обеспечения требуемых динамических свойств.

Работы по исследованию МСАУ традиционно ведутся по двум основным направлениям. Одно из них относится к синтезу оптимальных систем управления, при проектировании которых используются методы Л.С.Понтрягина, А.М.Летова, Р.Беллмана и др.[1]. Это направление характеризуется попыткой оптимизировать МСАУ с применением строгих методов вариационного исчисления. Однако использование принципов оптимальности для проектирования многомерных систем, имеющих высокие порядки систем дифференциальных уравнений, сопряжено с известными трудностями вычислительного плана. Это заставляет исследователей идти и по другому направлению, основанному на предварительном задании динамических свойств замкнутой МСАУ. Второе направление опирается на работы И.Н.Воз-несенского, В.Т.Морозов-ского, В.Меерова [2].

Существуя независимо, оба эти направления позволяют достичь требуемого результата в задачах своего класса.

Синтез МСАУ при априорном задании их динамических свойств требует выполнения больших объемов аналитических преобразований над операторными матрицами. В период, когда аппаратурные и программные средств для аналитического решения подобных задач отсутствовали или были слабо развиты, основные результаты были получены в области численного решения задач. Так, в работе [3] был предложен и исследован алгоритм синтеза МСАУ на базе матричного обобщения интеграла Дюамеля. Реализация этого алгоритма требовала решений множества сопутствующих задач (преобразования исходных операторов, определения начальных и конечных данных, вычисления матричных управляющих сигналов и проч.), заметно усложнявших достижение конечного результата. Одной из основных задач такого синтеза является задача обеспечения устойчивости результирующей МСАУ. В общем случае это требует введения ограничений [3] на задаваемые свойства МСАУ.

В современных условиях имеется достаточно много программных средств, позволяющих осуществлять сложные функциональные преобразования и аналитические выкладки на компьютерах. Подобными возможностями обладают такие системы компьютерной математики (СКМ), как Maple, MathCAD и др. Это существенно облегчает проблему синтеза МСАУ, сопоставление возможных вариантов их реализации, вариантов упрощения их структуры. Кратко опишем общий подход к синтезу многомерных систем с применением СКМ, удобный в практическом использовании.

Общий подход к синтезу

Синтез МСАУ с заданными динамическими свойствами предполагает выполнение ряда последовательных этапов [3], основными из которых служат:

1. анализ свойств объекта управления, имеющего передаточную матрицу $\mathbf{H}(p)$;
2. задание требуемых динамических свойств замкнутой МСАУ в форме передаточной матрицы $\mathbf{W}(p)$;
3. получение передаточной матрицы $\mathbf{R}(p)$ управляющей части;
4. анализ качества полученной МСАУ при точной или упрощенной реализации свойств управляющей части.

Важно отметить, что в результате выполнения этапов (1) – (4) исследователь получает структуру звеньев управляющей части, которая может быть определена символьными преобразованиями в среде одной из СКМ.

Анализ свойств объекта проводится в целях выявления нулей и/или полюсов определителя матрицы $\mathbf{H}(p)$. Для этого матрицу $\mathbf{H}(p)$ удобно представить в виде произведения полиномиальных матриц

$$\mathbf{H}(p) = [\mathbf{Q}(p)]^{-1}\,\mathbf{P}(p), \qquad (1)$$

причем матрица $\mathbf{Q}(p)$ – диагональная.

Определитель $\Delta(p)$ матрицы (1) выразится как $\Delta(p) = \Delta_P(p)/\Delta_Q(p)$, где $\Delta_P(p)$ и $\Delta_Q(p)$ – определители матриц $\mathbf{P}(p)$ и $\mathbf{Q}(p)$ соответственно. Определитель $\Delta(p)$ может иметь нули и/или полюса в правой половине комплексной плоскости или на мнимой оси. Обозначая полиномы, соответствующие таким элементам, надстрочными знаками (+), получаем для общего случая:

$$\Delta_P(p) = \Delta_P^{+}(p)\,\Delta_P^{-}(p)\,;\ \Delta_Q(p) = \Delta_Q^{+}(p)\,\Delta_Q^{-}(p)\,.$$

Здесь знаком (–) обозначены полиномы, корни которых расположены в левой полуплоскости. Общему случаю соответствует структура матрицы $\mathbf{Q}(p) = \mathbf{Q}^{+}(p)\mathbf{Q}^{-}(p)$. При наличии полиномов $\Delta_P^{+}(p)$ и $\Delta_Q^{+}(p)$, свобода выбора требуемых свойств замкнутой МСАУ ограничена [3] и выбор $\mathbf{W}(p)$ необходимо осуществлять в рамках соотношения:

$$\mathbf{W}(p) = \Delta_P^{+}(p)\,\mathbf{F}(p), \qquad (2)$$

где $\mathbf{F}(p) = [\mathbf{L}(p)]^{-1}\mathbf{K}(p)$; $\mathbf{L}(p) = \mathbf{L}^{-}(p)$ – диагональная полиномиальная матрица. Условия, которые необходимо выполнить для обеспечения устойчивости замкнутой МСАУ, имеют вид:

$$\Delta_P^{+}(p)\,\mathbf{K}(p) + \mathbf{V}(p)\mathbf{Q}^{+}(p) = \mathbf{L}(p), \qquad (3)$$

где $\mathbf{V}(p) = \mathbf{L}(p)[\mathbf{E} - \mathbf{W}(p)]\,[\mathbf{Q}^{+}(p)]^{-1}$.

С учетом условия (3) матрица $\mathbf{R}(p)$ управляющей части МСАУ находится как:

$$\mathbf{R}(p) = \overline{\mathbf{P}}(p)\,\mathbf{Q}^{-}(p)[\mathbf{V}(p)]^{-1}\mathbf{K}(p)\,/\,\Delta_P^{-}(p)\,. \qquad (4)$$

Здесь $\overline{\mathbf{P}}(p)$ – присоединенная матрица для матрицы $\mathbf{P}(p)$, т. е. $\mathbf{P}(p)\,\overline{\mathbf{P}}(p) = \Delta_P(p)\mathbf{E}$.

Выражения (3) и (4) являются необходимыми условиями достижения устойчивости замкнутой МСАУ с передаточной матрицей

$$\mathbf{W}_\Sigma(p) = [\mathbf{E} + \mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p)]^{-1}\mathbf{H}(p)\mathbf{R}(p). \qquad (5)$$

Учитывая, что анализ сложной многомерной системы сопряжен с громоздкими аналитическими выкладками, разместить которые в рамках настоящего материала не представляется возможным, рассмотрим относительно простой пример синтеза двумерной системы. Анализ в среде MathCAD сопроводим вставками из mcd-файла [4].

Пусть матрица $\mathbf{H}(p)$ объекта имеет вид:

$$\mathbf{H}(p) = \begin{bmatrix} \dfrac{1}{p+1} & \dfrac{1}{2p+1} \\ \dfrac{1.5p}{4p+1} & \dfrac{2}{5p+1} \end{bmatrix}.$$

Тогда, матрицы $\mathbf{Q}(p)$ и $\mathbf{P}(p)$ в (1)

$$\mathbf{Q}(p) = \begin{bmatrix} (p+1)(2p+1) & 0 \\ 0 & (4p+1)(5p+1) \end{bmatrix};$$

откуда $\mathbf{Q}^{+}(p) = 1$;

$$\mathbf{P}(p) = \begin{bmatrix} (2p+1) & (p+1) \\ 1.5p(5p+1) & 2(4p+1) \end{bmatrix},$$

а присоединенная матрица $\overline{\mathbf{P}}(p)$ равна

$$\overline{\mathbf{P}}(p) = \begin{bmatrix} 2(4p+1) & -(p+1) \\ -1.5p(5p+1) & (2p+1) \end{bmatrix}$$

Символьные преобразования в MathCAD определителя матрицы $\mathbf{P}(p)$ показывают, что этот определитель равен:

$-7.5(p + 0.6245833)(p + 0.2377655)(p - 1.795682)$

т. е. $\Delta_{\mathrm{P}}^{+}(p) = (p - 1.795682)$,

$\Delta_{\mathrm{P}}^{-}(p) = -7.5(p + 0.6245833)(p + 0.2377655)$.

Наличие $\Delta_{\mathrm{P}}^{+}(p)$ требует задать передаточную матрицу замкнутой системы в форме (2). Для задания $\mathbf{W}(p)$ потребуем от системы астатизма и автономности; последнее требование означает что матрица $\mathbf{W}(p)$ (2) должна быть диагональной. Кроме того, потребуем, чтобы время затухания переходного процесса в первом канале составляло ~10 с, во втором канале ~5 с. Этим требованиям удовлетворяет матрица $\mathbf{W}(p)$ с элементами, учитывающими (2):

$$W_{11}(p) = \frac{-\omega(p-1.795682)}{(\mu p+1)(2p+1)};\ W_{12}(p) = 0$$

$$W_{22}(p) = \frac{-\omega(p-1.795682)}{(\mu p+1)(p+1)},\ W_{21}(p) = 0. \qquad (6)$$

Здесь $\omega = 1/1.795682$ – параметр, обеспечивающий астатизм; μ – постоянная времени вспомогательного звена, введение которого обусловлено стремлением иметь правильные передаточные функции в $\mathbf{W}(p)$. Для того, чтобы вспомогательное звено практически не влияло на заданное время затухания процессов в каналах, примем параметр $\mu = 0.5$ с.

Матрицы $\mathbf{L}(p)$ и $\mathbf{K}(p)$ в составе $\mathbf{F}(p)$ (3) имеют вид:

$$\mathbf{L}(p) = (0.5p+1)\begin{bmatrix} (2p+1) & 0 \\ 0 & (p+1) \end{bmatrix};$$

$\mathbf{K}(p) = -\omega\,\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ – единичная матрица.

Матрица $\mathbf{V}(p)$ может быть получена из условия (3) как

$$\mathbf{V}(p) = \mathbf{L}(p) - \Delta_{\mathrm{P}}^{+}(p)\,\mathbf{K}(p).$$

Найденные элементы позволяют вычислить матрицу $\mathbf{R}(p)$ управляющей части МСАУ по формуле (4). Элементы матрицы $\mathbf{R}(p)$ не могут быть приведены здесь по причине громоздкости соответствующих выражений. Отметим лишь, что $R_{11}(p)$, $R_{12}(p)$, $R_{22}(p)$ представляют сумму передаточных функций интегратора и трех апериодических звеньев, а $R_{21}(p)$ – константы и трех апериодических звеньев. Переходные характеристики отдельных передаточных функций – элементов матрицы $\mathbf{R}(p)$, представлены на рис. 1 (сплошные кривые).

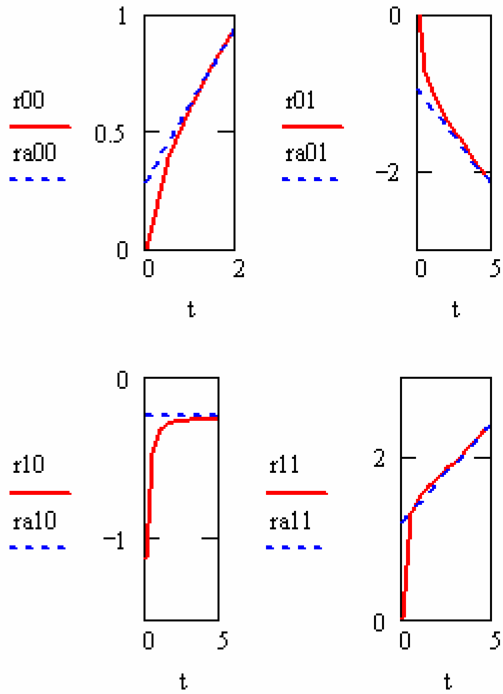

Рис. 1. Переходные характеристики регуляторов

Путем сопоставления структур управляющей части, выбранных с учетом $\Delta_{\mathrm{P}}^{+}(p)$ в выражении (2), и без введении этого элемента в алгоритм вычисления $\mathbf{R}(p)$, легко убедиться в том, что во втором случае, т. е при $\mathbf{W}(p) = \mathbf{F}(p)$ характеристический полином замкнутой МСАУ в нашем примере будет иметь положительный корень, который соответствует полиному $(p - 1.795682)$.

При реализации в управляющей части элементов матрицы $\mathbf{R}(p)$, полученной по выражению (4), реакции системы (5) будут в точности соответствовать заданным. Обращает внимание возможность достаточно грубой аппроксимации отдельных элементов $\mathbf{R}(p)$. Вариант такой аппроксимации в рассматриваемом примере изображен на рис. 1 пунктиром. Этому варианту соответствуют следующие передаточные функции:

$$ra_{11}(p) = \frac{0.327}{p} + 0.283\,;\; ra_{01}(p) = \frac{-0.243}{p} - 0.96\,;$$

$$ra_{10}(p) = -0.245;\; ra_{01}(p) = \frac{0.243}{p} + 1.2\,,$$

совокупность которых составляют матрицу $\mathbf{r}(p)$ аппроксимированной управляющей части. Передаточная матрица замкнутой системы, включающей $\mathbf{r}(p)$, выразится согласно (5):

$$\mathbf{w}(p) = [\mathbf{E} + \mathbf{H}(p)\mathbf{r}(p)]^{-1}\mathbf{H}(p)\mathbf{r}(p). \qquad (7)$$

Реакции системы (7) на единичный скачок в первом канале представлены на рис. 2 (пунктир). Сплошная кривая (эталон) соответствует переходной характеристике заданной $W_{11}(p)$ в (6). Функция $f00(t)$ получена в среде MathCAD обратным преобразованием Лапласа функции

$$W_{11}(p)\,/\,p \;=\; \frac{-\,\omega(p - 1.795682)}{(\mu p + 1)(2p + 1)\,p}\,;$$

$$f00(t) = 1 + 0.705\exp(-2t) - 1.7\exp(-0.5t).$$

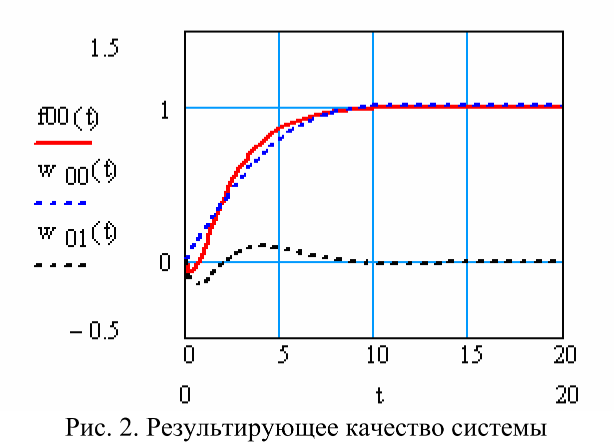

Рис. 2. Результирующее качество системы

Полученные результаты свидетельствуют о достаточной близости результирующих реакций системы к эталонным (заданным), несмотря на принятый вариант аппроксимации звеньев управляющей части. Реакция первого канала (экспоненциальная зависимость, пунктир на рис. 2) затухает в заданное время и мало отличается от сплошной кривой (эталона). Реакция второго канала на возмущение первого канала в идеальном случае должна быть нулевой (см. $W_{12}(p)$ в выражениях (6)). В силу принятой аппроксимации звеньев (см. рис. 1), результирующая реакция второго канала системы (7) на несобственное возмущение проявляется в виде колебательного быстро затухающего до нуля процесса. Понятно, что при более точной аппроксимации элементов матрицы $\mathbf{R}(p)$ управляющей части соответствие реакций результирующей системы (7) заданным процессам будет расти.

Возможность достаточно грубой аппроксимации в структурах МСАУ, которые получены с применением рассмотренного подхода, свидетельствует о низкой чувствительности результирующих систем к параметрам управляющей части, что важно при решении прикладных задач.

Выводы. Синтез МСАУ с заданными свойствами при использовании систем компьютерной математики резко упрощается. Выражение (4) позволяет получить структуру звеньев управляющей части и определить их настройки. Выражения (2) и (3) служат ограничениями свободы выбора требуемых характеристик МСАУ; эти ограничения следует применять в случае, когда объект имеет полиномы $\Delta_P^+(p)$ и $\Delta_Q^+(p)$. Соотношения (2) – (4) гарантируют устойчивость МСАУ в общем случае. При $\Delta_P^+(p) = \Delta_Q^+(p) = 1$ могут быть заданы произвольные свойства МСАУ.

Литература

1. Крутько П. Д, Алгоритмы и программы проектирования автоматических систем, –М: 1988, 306с.

2. Дезоер Ч, Видъясагар М, Системы с обратной связью: вход-выходные соотношения. –М: Наука, 1983. 380с

3. Ивановский Р.И., Таранов А.Г. Синтез МСАУ с применением ЦВМ. М., Наука, 1970. – 172 с.

4. Ивановский Р.И. Компьютерные технологии в науке и образовании. Практика применения систем MathCAD Pro. М.: Высшая школа. 2003. - 432 с.