Стационарные фильтры и их анализ

В комплексных измерительных и информационно-управляющих системах распространение получили стационарные фильтры (СФ), оптимальные на бесконечном времени. Применительно к линейным стационарным системам СФ позволяют реализовать оптимальную в установившемся режиме обработку информации. Фильтры этого класса привлекают внимание исследователей ввиду предельной простоты реализации, поскольку матрица их коэффициентов усиления постоянна: $\mathbf{K_{сф}} = \mathbf{K_{opt}}(\infty)$, где $\mathbf{K_{opt}}$ — матрица коэффициентов усиления фильтра Калмана.

Основные соотношения анализа

Пусть линейная модель погрешностей системы имеет вид:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{w};\ \mathbf{z} = \mathbf{H}\cdot\mathbf{x} + \mathbf{v};\ \mathbf{y} = \mathbf{H_0}\cdot\mathbf{x};\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0,\ M[\mathbf{x}_0] = \mathbf{m}_0,\ \mathbf{P}_0 = \mathrm{cov}[\mathbf{x}_0], \quad (1)$$

где $\mathbf{x}$ — $(n \times 1)$-вектор состояний модели, $\mathbf{z}$ — $(m \times 1)$-вектор измеряемых сигналов, $\mathbf{y}$ — $(u \times 1)$-вектор выходных переменных, $\mathbf{w}$ — вектор входных белых шумов, $\mathbf{v}$— вектор белых шумов в канале измерений. Матрицы интенсивностей шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ обозначим $\mathbf{Q}$ и $\mathbf{R}$ соответственно.

При обработке информации в НС могут использоваться фильтры калмановского типа (ФКТ), в множество которых входят оптимальные (ОФК), редуцированные(РФ), упрощенные (УФ), стационарные (СФ) и другие фильтры этого класса, обобщенное уравнение которых имеет вид:

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}(t)[\mathbf{z} - \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{x}}];\hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0\ . \quad (2)$$

Здесь $\hat{\mathbf{x}}$ – $(n \times 1)$ – вектор оценок состояний; $\mathbf{K}(t)$ – $(n \times m)$ – матрица коэффициентов усиления фильтра, структура и параметры которой определяют тип используемого ФКТ. Для стационарных фильтров (СФ) $\mathbf{K}(t) = \mathbf{K}$.

Качество работы фильтра (2) отражает вектор ошибок оценки $\mathbf{e} = \mathbf{x} - \hat{\mathbf{x}}$, который, с учетом (1) и (2), удовлетворяет уравнению:·

$$\dot{\mathbf{e}} = [\mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H}]\mathbf{e} + \mathbf{B}\mathbf{w} - \mathbf{K}(t)\mathbf{v};\ M[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{0};\ \mathrm{cov}[\mathbf{e}(0)] = \mathbf{P}(0). \quad (3)$$

В общем случае шумы $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$ могут быть коррелированными, поэтому, объединяя их в вектор $\mathbf{w0} = [\mathbf{w}^T : \mathbf{v}^T]^T$ с матрицей интенсивностей $\mathbf{Q0}$, уравнение (3) запишем в виде ([:] — обозначение блочной матрицы-строки):

$$\dot{\mathbf{e}} = \mathbf{A0}(t)\cdot\mathbf{e} + \mathbf{B0}(t)\cdot\mathbf{w0};\ \mathbf{A0}(t) = \mathbf{A} - \mathbf{K}(t)\mathbf{H};\ \mathbf{B0}(t) = [\mathbf{B}\ : -\mathbf{K}(t)]. \quad (4)$$

Ковариационное уравнение для вектора ошибок оценки (4) имеет вид:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A0}\,(t)\cdot\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\cdot\ \mathbf{A0}\,(t)^T + \mathbf{B0}(t)\cdot\mathbf{Q0}\ \mathbf{B0}(t)^T;\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (5)$$

Для случая независимости шумов $\mathbf{w}$ и $\mathbf{v}$, уравнение (5) перепишется:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A0}\,(t)\cdot\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\cdot\ \mathbf{A0}\,(t)^T + \mathbf{BQB}^T + \mathbf{K}(t)\mathbf{RK}^T(t);\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0. \quad (6)$$

Для ОФК с матрицей коэффициентов усиления

$$\mathbf{K_{opt}}\,(t)=\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{H}^T\,\mathbf{R}^{-1} \quad (7)$$

ковариационное уравнение (6) преобразуется в известное матричное уравнение Риккати для ковариационной матрицы вектора ошибок оценки ОФК:

$$\dot{\mathbf{P}}^* = \mathbf{P}^*(t)\mathbf{A}^T + \mathbf{AP}^*(t) + \mathbf{B}\mathrm{Q}\mathbf{B}^T - \mathbf{P}^*(t)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{HP}^*(t),\ \mathbf{P}^*(0)=\mathbf{P}_0. \quad (8)$$

Здесь $\mathbf{P}^*$ — ковариационная матрица ошибок оптимальных оценок.

Матричные дифференциальные уравнения (5), (6) и (8) позволяют сопоставлять качество процессов обработки информации при использовании ФКТ и ОФК. При таком сопоставлении сравниваются дисперсии ошибок оценки выходных переменных $\mathbf{e_y} = \mathbf{H_0}\cdot\mathbf{e}$. Эти дисперсии в данном случае — диагональные элементы ковариационных матриц, полученных линейными преобразованиями матриц $\mathbf{P}$ (5), (6) и $\mathbf{P}^*$ (8):

$$\mathbf{P_y}(t) = \mathrm{H}_0\cdot\mathrm{P}(t)\cdot\mathbf{H_0}^T;\ \mathbf{P}^*_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{H_0}\cdot\mathbf{P}^*(t)\cdot\mathbf{H_0}^T, \quad (9)$$

где $\mathbf{P_y}(t)$ и $\mathbf{P}^*_{\mathbf{y}}(t)$ — ковариационные матрицы ошибок оценки выходов при использовании ФКТ и оптимального фильтра соответственно.

Выпишем уравнения СФ с произвольными постоянными коэффициентами усиления, используя выражения (2)—(9):

$$\dot{\hat{\mathbf{x}}} = \mathbf{A}\cdot\hat{\mathbf{x}} + \mathbf{K}\cdot[\mathbf{z} - \mathbf{H}\cdot\hat{\mathbf{x}}];\hat{\mathbf{x}}(0) = \bar{\mathbf{x}}_0 \;. \tag{14}$$

$\dot{\mathbf{e}}$ = **A0**·**e** + **B0**·**w0**; **A0 = A – K·H; B0 =** [**B** : –**K**]; **P = cov(e);**

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A0}\cdot\mathbf{P}(t) + \mathbf{P}(t)\ \mathbf{A0}^T + \mathbf{B0}\cdot\mathbf{Q0}\ \mathbf{B0}^T;\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P}_0;\ \ \mathbf{P}_y(t) = \mathrm{H}_0\cdot\mathbf{P}(t)\cdot\mathbf{H_0}^T. \tag{15}$$

Здесь $\mathbf{P}_y(t)$ — ковариационная матрица ошибок оценки выходов при использовании ФКТ (14) с произвольной постоянной матрицей **K**.

Традиционным подходом к синтезу стационарных фильтров служит использование критерия минимума дисперсий ошибок оценки в установившемся режиме обработки, т. е. критерия вида:

$$I_0 = \mathrm{sp}\,\mathbf{P}(\infty). \tag{16}$$

. Этому критерию в принятых условиях соответствует выбор матрицы коэффициентов СФ в виде

$$\mathbf{K}_{\mathbf{opt}} = \mathbf{P}^{*}(\infty)\cdot\mathbf{H}^T\,\mathbf{R}^{-1}, \tag{17}$$

где $P^*(\infty)$ — установившееся значение ковариационной матрицы $\mathbf{P}^*(t)$ уравнения Риккати (8): $\mathbf{P}^*(\infty)\mathbf{A}^T + \mathbf{A}\mathbf{P}^*(\infty) + \mathbf{B}\mathbf{Q}\mathbf{B}^T - \mathbf{P}^*(\infty)\mathbf{H}^T\mathbf{R}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{P}^*(\infty) = \mathbf{0}$.

Опыт практического использования СФ (14) с $\mathbf{K} = \mathbf{K}_{\mathbf{opt}}$ **(17)** показывает, что в начальный период работы появляются медленно затухающие переходные процессы, в течение которого ошибки обработки могут существенно возрастать. Появление таких процессов вызвано как начальными рассогласованиями, так и малостью значений элементов матрицы $\mathbf{K}_{\mathbf{opt}}$ (17) и, как следствие, наличием собственных чисел матрицы $(\mathbf{A} - \mathbf{K}_{\mathbf{opt}}\cdot\mathbf{H})$, близких к мнимой оси.

Обеспечение высокого качества процессов обработки на всем временном интервале с использованием константной матрицы **K** стационарного фильтра практически невозможно. Так, повышение требований к качеству обработки в установившемся режиме вызывает рост погрешностей на начальном этапе, и наоборот. В то же время возможен компромисс, если в измерительной системе допускаются установившиеся погрешности, превышающие соответствующие оптимальные. Однако проблема может быть сравнительно легко решена при использовании, например, двухступенчатой матрицы **K**. В этом случае фильтр, строго говоря, уже не может быть назван стационарным.

Назовем субоптимальный фильтр (14) с двухступенчатой матрицей **K** двухступенчатым фильтром (ДФ). Для поиска первой ступени матрицы **K**., т. е. матрицы **K1** таких фильтров могут быть использованы различные критерии. В качестве второй ступени **(K2)**, естественно, выбирается $\mathbf{K}_{\mathbf{opt}}$ (17). При этом проблема снижения пиков погрешности на начальном этапе обработки может быть решена как выбором **K1**, так и варьированием момента времени переключения **K1** на **K2**. Этот момент можно найти, решая экстремальную задачу, но значительно проще результат может быть достигнут путем моделирования.

Пример

Расчеты в ресурсах проводятся для простой задачи выработки линейных перемещений. В комплексной системе. имеются два датчика – измеритель скорости линейного перемещения и измеритель непосредственно перемещений. Погрешность первого датчика $\Delta v = \Delta v_1 + \Delta v_2$, $M(\Delta v) = 0$, Δv_1 – случайная величина с дисперсией $(\sigma_1)^2$; Δv_2 – случайный процесс с корреляционной функцией $K_v(\tau) = (\sigma_2)^2\exp(\alpha_2|\tau|)$. Погрешность измерителя перемещений $\Delta h = \Delta h_1 + \Delta h_2$ имеет аналогичные характеристики: $M(\Delta h) = 0$, Δh_1 – случайная величина с ди3сперсией $(\sigma_3)^2$; Δh_2 – случайный процесс с корреляционной функцией $K_h(\tau) = (\sigma_4)^2\exp(\alpha_4|\tau|)$.

Проинтегрируем показания первого датчика и вычтем из выходного сигнала интегратора показания датчика перемещений. Полученный разностный сигнал z служит входом в СФ (14). В канале измерения присутствует случайная помеха в виде белого шума с интенсивностью R. Математическая модель сигнала z имеет вид (1). Анализ показал, что эта модель имеет ненаблюдаемый элемент x_4, устранение которого дает модель (1) четвертого порядка.

Элементы вектора состояний модели x_i (i = 1, 2, 3, 4) соответствуют элементам вектора $|\Delta H\ \Delta v_1\ \Delta v_2\ \Delta h_2|^T$.

Интенсивности шумов w_1, w_2, $\mathbf{v}$ равны соответственно $q_1 = 1$, $q_2 = 1$, $R = 0.01$. выходная переменная $y = x_1 = \Delta H$. Числовые значения параметров модели указаны в ресурсе.