

О возможности создания алгоритмической основы дозирования
Ивановский Р. И.

В общей теории систем различают статические и динамические системы. Эти системы отличаются друг от друга, как сущностью, так и способами математического описания.

Статические системы реагируют на возмущения безынерционно, моментально. Такие системы описываются алгебраическими уравнениями, например, вида: $y = a \cdot x$, где y — реакция системы на возмущение, a — коэффициент, x — возмущение.

Динамические системы (ДС) реагируют на возмущения инерционно и описываются дифференциальными уравнениями (ДУ). Например, такое уравнение может иметь вид: $\dot{x} = a \cdot x + b \cdot u$; $y = c \cdot x$. Здесь y — реакция динамической системы (выходная переменная), x — переменная состояния системы, \dot{x} — первая производная x ; u — входной сигнал (возмущения); a , b , c — коэффициенты. При решении ДУ задается начальное условие $x(0)$.

Решениями дифференциальных уравнений служат различные функции времени, поэтому выходная переменная и состояние системы для приведенного выше ДУ есть $y(t)$ и $x(t)$.

Для упрощения решения ДУ в теории систем часто используются преобразования Лапласа [1, 2]. Это преобразование позволяет заместить решения ДУ решениями обыкновенных алгебраических уравнений. В преобразованное по Лапласу ДУ, которое было приведено выше, имеет вид $p \cdot x(p) = a \cdot x(p) + b \cdot u(p)$; $y(p) = c \cdot x(p)$, где p — оператор Лапласа, а, например, $y(p)$ — изображение по Лапласу выходной переменной. Каждому изображению по Лапласу соответствует некая функция времени, которая носит название оригинал.

Введение преобразования Лапласа позволяет использовать в описании динамических систем понятие передаточной функции (п.ф.). Передаточной функцией называют отношение преобразования Лапласа выходной переменной $y(p)$ к преобразованию Лапласа входной переменной (возмущения) $u(p)$ при нулевых начальных условиях:

$$W(p) = y(p) / u(p). \quad (1)$$

Совокупностью п.ф. можно описать весьма сложные динамические системы. Для приведенного выше ДУ п.ф. имеет вид

$$W(p) = c \cdot b / (p - a). \quad (2)$$

Другим распространенным понятием в теории динамических систем является переходная характеристика (п.х.) $h(t)$ — реакция системы на единичное ступенчатое воздействие $1(t)$. Функция $1(t)$ равна 0 при $t < 0$ и равна 1 при $t \geq 0$. Изображение по Лапласу $1(t)$ есть $1/p$, поэтому изображение по Лапласу п.х. $h(p)$ для п.ф. $W(p)$ выразится как:

$$h(p) = W(p)/p. \quad (3)$$

Весьма важным понятием в теории ДС служит понятие устойчивости [2, 3]. Не раскрывая здесь полностью это емкое понятие, ограничимся лишь

упрощенным определением. Устойчивой ДС называют систему, выходная переменная $y(t)$ которой имеет конечное установившееся значение при постоянном воздействии $u = \text{const}$. Другое определение: для устойчивости ДС с п.ф. $W(p)$ необходимо и достаточно, чтобы корни полинома знаменателя $W(p)$ имели отрицательные вещественные части. Так, ДС с п.ф. (2) будет устойчивой при $a < 0$.

К динамическим системам относятся многие технические системы. В настоящее время теория ДС — одна из наиболее развитых частей общей теории систем. К ДС с успехом могут быть отнесены также и биологические системы, в частности, и человек, как одна из наиболее сложных форм этих систем. Реакции человека на различные возмущения проявляются постепенно и могут описываться функциями времени, как и решения ДУ.

Предположим, что в какой-то момент времени t_0 человек получает дозу определенного лекарственного препарата. Пусть эта доза составляет $u = \Delta$ мг. Типовые реакции наблюдаемого параметра жизнедеятельности человека $y(t)$ приведены на рис. 1 в предположении, что перед введением препарата этот параметр находился в состоянии покоя. Из левого графика (см. рис. 1,а) видно, что указанный параметр с момента $t_0 = 20$ ед.вр. стал менять свое значение относительно прежнего установившегося уровня $y(t_0) = 1$, и принял, после завершения переходного процесса, новое установившееся значение, равное 1.5. В данном случае реакция имеет вид возрастающей экспоненты.

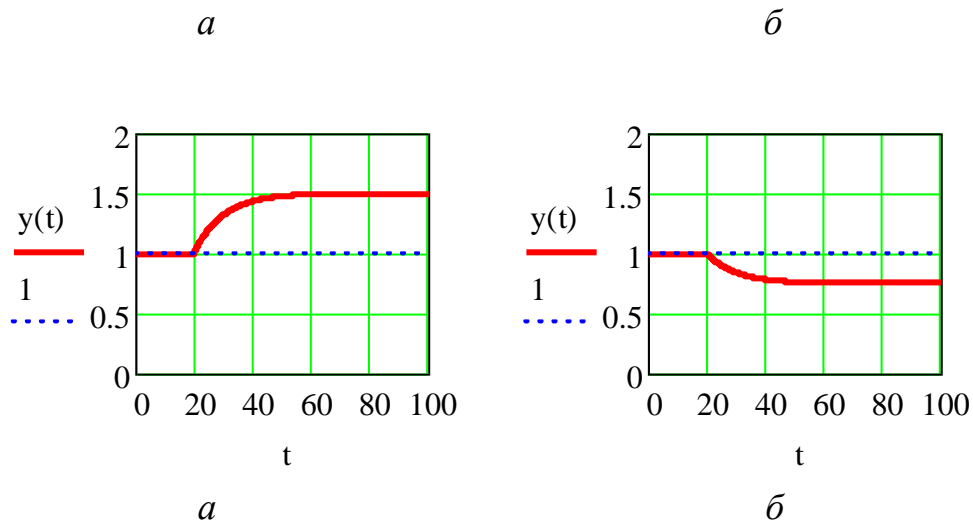


Рис. 1. Типовые реакции на воздействие

В других экспериментах, в зависимости от типа препарата и выбора наблюдаемого параметра (выходной переменной $y(t)$), характер реакций может отличаться от изображенного на рис. 1,а. Например, реакция может иметь вид ниспадающей экспоненты (см. рис. 1,б). В любом случае подобные реакции свидетельствуют о том, что человек может рассматриваться в качестве динамической системы или объекта управления.

Данное утверждение служит здесь в качестве рабочей гипотезы, в рамках которой поставим задачу автоматизации процедур дозирования

лекарственных препаратов и рассмотрим алгоритмы ее решения. Понятно, что подобная постановка не будет иметь всеобъемлющий характер, но некоторые процедуры проблемы дозирования, по мнению авторов, могут быть успешно автоматизированы. Анализ будем сопровождать иллюстрациями в виде копий фрагментов из файлов Mathcad (mcd-файлов).

Рассмотрим основные элементы решения подобной задачи.

С точки зрения теории ДС, задача автоматизированного определения дозы некоторого препарата, эквивалентна определению входного сигнала $u(t)$ (или сигнала управления) для динамического звена с п.ф. $W(p)$. Эта п.ф. представляет пациента как объект управления, полностью характеризует его динамические свойства и служит, поэтому, его математической моделью.

Реакция пациента на это входное воздействие оценивается путем наблюдения за выбранным параметром его жизнедеятельности. Этот параметр, с точки зрения ДС, служит выходным сигналом $y(t)$. Элементы такой модели представлены на рис. 2. Согласно (1), для рис.2 имеем:

$$y(p) = W(p) \cdot u(p). \quad (4)$$

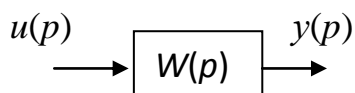


Рис. 2. Формальная модель задачи

Перечислим основные этапы решения поставленной задачи:

1. Выбор препарата, его пробной дозы Δ и назначение наблюдаемого параметра $y(t)$ для эксперимента.
2. Проведение эксперимента.
3. Выбор требуемого характера изменения $y(t)$, т. е. определение желаемой реакции пациента на используемый препарат.
4. Определение динамических свойств объекта управления (пациента).
5. Определение $u(t)$ — искомой эталонной зависимости входного сигнала (дозы), обеспечивающей заданные требования к характеру изменения выходной переменной.
6. Определение практически реализуемой (например, ступенчатой) формы введения препарата, обеспечивающей близость реакции пациента к требуемой.

Кратко прокомментируем отдельные этапы.

Этап 1. Планирование эксперимента и определение его параметров и составных элементов — исключительная прерогатива медицинских работников.

Этап 2. Целью эксперимента служит сбор данных, необходимых для выполнения этапа 4. В рамках этапа 2:

- переходят к относительным (безразмерным) величинам. В частности, 100%-ые величины заменяют на 1; вводится относительное время, при котором $t_0 = 0$. Эксперимент начинают

только в условиях, когда наблюдаемый параметр находится в установившемся состоянии $y(t_0) = \text{const}$

- В момент $t_0 = 0$ пациенту вводится пробная доза $u^* = \Delta$.
- Наблюдается реакция $y_\Delta(t)$ на это воздействие. Периодически фиксируются превышения наблюдаемого параметра над исходным состоянием: $h_\Delta(t) = y_\Delta(t) - y(t_0)$. Фиксация значения этой разности осуществляется вплоть до достижения нового установившегося состояния.
- Определяется переходная характеристика объекта: $h(t) = h_\Delta(t) / \Delta$.
- При возможности на всем интервале проведения эксперимента контролируется количество препарата, воздействующего на пациента.

Результатом этапа служат значения $h(t)$ для последовательных моментов времени, разделенных постоянным интервалом дискретности.

Этап 3. Определение требуемой реакции входит в компетенцию медицинского персонала. По мнению авторов, наиболее распространенным вариантом реакций пациента на вводимые препараты в данной задаче являются характеристики, типовой вид которых представлен на рис. 3.

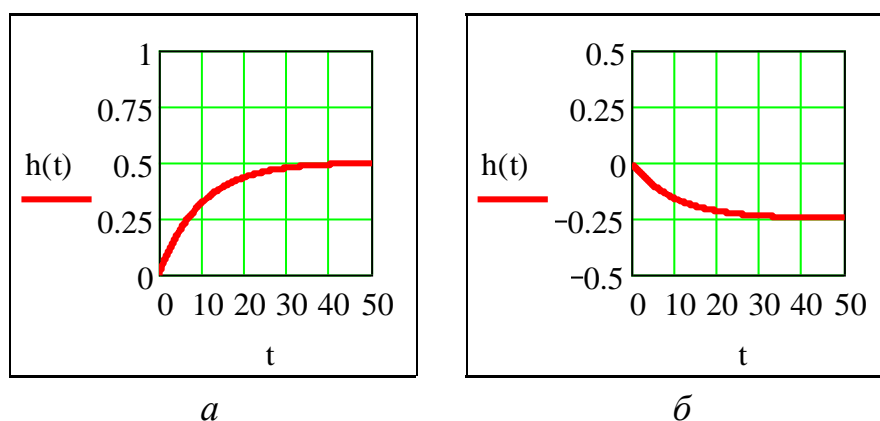


Рис. 3. Типов характеристики

Эти экспоненциальные кривые можно описать простым выражением:

$$f(t) = k_0 \cdot [1 - \exp(-a_0 \cdot t)]; \quad a_0 = 1 / T_0; \quad T_0 > 0, \quad (5)$$

где k_0 — коэффициент усиления, T_0 — постоянная времени экспоненты.

Желаемой реакции (5) соответствует изображение по Лапласу вида:

$$f(p) = F(p) / p; \quad F(p) = k_0 / (T_0 \cdot p + 1), \quad (6)$$

где p — оператор Лапласа.

Выбор $f(t)$ должен сопровождаться заданием значений параметров k_0 и T_0 . Эти параметры с достаточной точностью можно определить по графику $f(t)$.

Так, значение k_0 равно установившемуся значению $f(t_{\text{зат}})$, где $t_{\text{зат}}$ — время затухания переходного процесса, определяемое из графика.

Для оценки параметра T_0 можно использовать выражение:

$$T_0 = t_{\text{зат}} / 5. \quad (7)$$

Выражение (7) использует известное свойство экспоненты $\exp(-t/T_0)$ с отрицательным показателем степени. Ее значение за пять постоянных времени гарантировано достигает 1%-ой зоны:

$$\exp(-t_{\text{зат}}/T_0) = \exp(-5) = 0.00674.$$

Результатом этапа 3 служат $f(t), f(p), F(p)$ (5)–(7).

Этап 4. Целью этого этапа является определение вида и параметров п.ф. $W(p)$ объекта по результатам эксперимента. Ранее, на этапе 2, была определена п.х. $h(t)$. Ее описание, по аналогии с (5) и (6), имеет вид:

$$h(t) = k_1 \cdot [1 - \exp(-a_1 \cdot t)]; \quad a_1 = 1/T_1; \quad T_1 > 0, \quad (8)$$

$$h(p) = k_1 / (T_1 \cdot p + 1) \cdot p; \quad (9)$$

Параметры k_1 и T_1 могут быть определены по правилам, описанным выше, в разд. Этап 3. Значение постоянной времени T_1 характеризует естественную динамику реакции пациента на применяемый препарат.

Вид п.ф. $W(p)$, как следует из анализа схемы рис. 2, определяется характером входного и выходного сигналов. Выходной сигнал, в данном случае $h(t)$, описан выражениями (5) и (6). Характер входного сигнала $u(t)$ зависит от особенностей используемого препарата. Не пытаясь раскрыть все детали этой зависимости, остановимся здесь на двух основных ее вариантах:

Вариант 1. При проведении эксперимента и определении $h(t)$ было реализовано постоянное воздействие фиксированной дозой препарата на выбранном интервале времени, т. е. $u(t) = u = 1$. Изображение по Лапласу такого сигнала $u(p) = 1/p$; выходным сигналом служит $h(p)$ (9), поэтому в данном варианте искомая п.ф. $W(p)$, согласно (4), имеет вид:

$$W(p) = k_1 / (T_1 \cdot p + 1). \quad (10)$$

Правила определения параметров п.ф. были описаны ранее.

Вариант 2. При проведении эксперимента, препарат, введенный в момент времени t_0 , постепенно выводится организмом пациента. Этот процесс может иметь различные формы. Ограничимся здесь характером изменения $u(t)$ в виде ниспадающей экспоненты:

$$u(t) = k_u \cdot a_u \cdot \exp(-a_u \cdot t); \quad a_u = 1/T_u; \quad T_u > 0, \quad (11)$$

$$u(p) = k_u / (T_u \cdot p + 1), \quad (12)$$

где k_u — коэффициент усиления, T_u — постоянная времени экспоненты.

Начальное значение экспоненты (10) $u(0) = k_u \cdot a_u = \Delta$, т. е. равно разовой дозе препарата.

При определении п.х. объекта $h(t)$ на этапе 2 отмечалось, что приращение реакции необходимо делить на Δ . Поэтому п.х. $h(t)$ определялась при условии $u(0) = 1$, т. е. при $k_u = T_u$.

Таким образом, в данном случае, для выражения (4) имеем: входной сигнал вида (12) при $k_u = T_u$; выходной сигнал $h(p)$ (9). Поэтому п.ф. $W(p)$ принимает вид:

$$W(p) = h(p) / u(p) = k_1 \cdot (T_u \cdot p + 1) / T_u \cdot (T_1 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (13)$$

Структура $W(p)$ становится ясной после разложения (13) на простые дроби. На рис. 4 приведен фрагмент mcd-файла с этим разложением.

$$u(p) := \frac{k_1 \cdot (T_u \cdot p + 1)}{T_u \cdot p \cdot (T_1 \cdot p + 1)}$$

$$u(p) := u(p) \text{ convert , parfrac , p} \rightarrow \frac{k_1}{p \cdot T_u} - k_1 \cdot \frac{T_1 - T_u}{(T_1 \cdot p + 1) \cdot T_u}$$

Рис. 4. Разложение п.ф. (13) на простые дроби

В верхней части фрагмента (см. рис. 4) задается исходное выражение (13). В нижней части выполняется разложение, из которого следует, что п.ф. (13) может быть представлена суммой двух п.ф.: п.ф. интегратора (первое слагаемое разложения) и п.ф. первого порядка. Свойства этих п.ф. будут рассмотрены далее в примере.

Результатом этапа 4 являются п.ф. (10) и (13).

Этап 5. Выполнение предыдущих этапов упрощает задачу определения функции $u(t)$, обеспечивающей заданную реакцию $f(t)$ (5). Наиболее просто эта задача решается в области преобразований Лапласа.

При решении данной задачи используем схему рис. 2 и выражение (4). Выходным сигналом в данной задаче служит $f(p)$ (6). В качестве п.ф. используем выражения (10) или (13) в зависимости от особенностей входного воздействия. Основное соотношение при решении задачи, согласно (4), имеет вид: $f(p) = W(p) \cdot u(p)$, откуда $u(p) = f(p) / W(p)$. Подставляя в это выражение формулы (6), (10) и (13), получаем вид искомых входных воздействий для двух вариантов, описанных в разд. Этап 2:

$$\text{Вариант 1. } u_1(p) = k_0 \cdot (T_1 \cdot p + 1) / k_1 \cdot (T_0 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (14)$$

$$\text{Вариант 2. } u_2(p) = k_0 \cdot T_u \cdot (T_1 \cdot p + 1) / k_1 \cdot (T_u \cdot p + 1) \cdot (T_0 \cdot p + 1). \quad (15)$$

Выражения (14) и (15) позволяют сделать выводы о начальных и конечных значениях оригиналов $u(t)$ входных воздействий. Обозначая эти значения $u(0)$ и $u(\infty)$, для двух вариантов имеем:

$$u_1(0) = k_0 \cdot T_1 / k_1 \cdot T_0 ; u_1(\infty) = k_0 / k_1 ; \text{ при } T_0 = T_1 : u_1(t) = k_0 / k_1. \quad (16)$$

$$u_2(0) = k_0 \cdot T_1 / k_1 \cdot T_0 ; u_2(\infty) = 0 ; \text{ при } T_0 = T_1 : u_2(p) = k_0 \cdot T_u / k_1 \cdot (T_u \cdot p + 1). \quad (17)$$

Из (14) — (17) можно сделать следующие выводы:

- при $T_0 \neq T_1$ функции $u_1(t)$ представляют собой экспоненты, динамика которых определяется значением T_0 . В случае, когда желаемая реакция пациента на применяемый препарат должна быть более быстрой, чем естественная, выбирают $T_0 < T_1$.

- если желаемая динамика реакции пациента должна соответствовать естественной, выбирают $T_0 = T_1$. При этом $u_1(t) = k_0 / k_1 = \text{const}$.
- для u_2 единственным вариантом служит выбор естественной динамики, т. е. $T_0 = T_1$. При этом разовая доза определяется значением $u_2(0) = k_0 / k_1$.

Этап 6. В общем случае, при $T_0 \neq T_1$, закон $u_1(t)$ введения дозы характеризуется гладкой кривой, которую трудно реализовать на практике. Такие кривые должны заменяться законами, реализовать которые проще. Так, можно использовать, например, ступенчатые функции. На рис. 5 приведен пример применения ступенчатых функций.

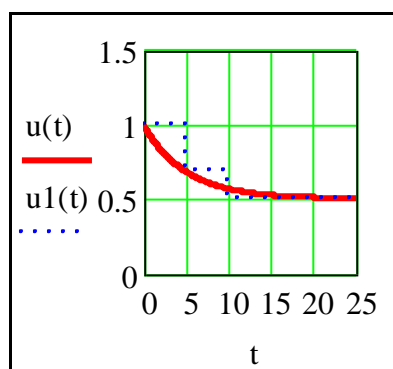


Рис. 5. Ступенчатая аппроксимация кривой

Исходная кривая изображена на графике (см. рис. 5) сплошной линией; ступенчатая функция (пунктир) сформирована значениями $u(0)$, $u(5)$, $u(10)$ и т. д., постоянными на интервалах в 5 ед. времени.

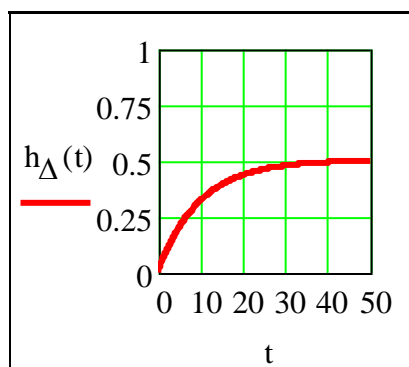
В целом, задача ступенчатой аппроксимации — экстремальная задача, в которой необходимо определить моменты скачков и уровни ступеней путем поиска минимума одного из критериев. Таким критериев, может служить, например, сумма квадратов разностей $[f^*(t) - f(t)]$ в отдельные моменты времени, где $f^*(t)$ — реакция пациента на ступенчатый ввод препарата; $f(t)$ — реакция, заданная в качестве желаемой.

Большую помощь в определении ступеней может оказать применение математических моделей с возможностями менять параметры ступеней.

Пример. Пусть пробная доза препарата составляет $\Delta = 0.25$. График превышения $h_\Delta(t)$ реакции на эту дозу приведен на рис. 6. Из этого графика видно, что $h_\Delta(t)$ затухает примерно за 50 ед.вр.; пятую часть этой величины можно принять в качестве постоянной времени экспоненты в выражении (8): $T_1 = 10$. Из графика (см. рис. 6) видим, что кривая $h_\Delta(t)$ затухает на уровне 0.5.

Выше отмечалось, что $h(t) = h_\Delta(t) / \Delta$, поэтому коэффициент усиления в (8) $k_1 = 0.5 / \Delta = 2$. Таким образом, операторное выражение (9) в данном случае имеет вид

$$h(p) = 2 / (10 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (18)$$



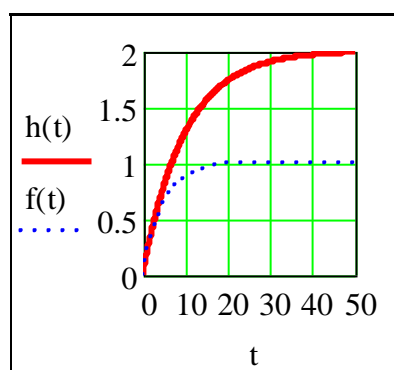
$$h_{\Delta}(50) = 0.497$$

Рис. 6. Реакция на Δ

Зададим параметры желаемой реакции $f(t)$ (5): $k_0 = 1$, $T_0 = 5$. В этих значениях отражено стремление добиться заметного результата в лечении и повысить скорость реакции по сравнению с достигнутой в эксперименте. При этом операторное выражение (6) для $f(t)$ примет вид:

$$f(p) = 1 / (5 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (19)$$

На рис. 7 приведены графики функций $h(t)$ и $f(t)$.



$$h(50) = 1.987$$

$$f(25) = 0.993$$

Рис. 7. Функции $h(t)$ и $f(t)$

Выражения (18) и (19) служат основанием для получения п.ф. объекта и входных воздействий $u_1(p)$ (14) лишь для первого варианта. Обозначая $W_1(p)$ п.ф. объекта для этого варианта, согласно (10) и (18), имеем:

$$W_1(p) = h(p) \cdot p = 2 / (10 \cdot p + 1). \quad (20)$$

При определении $u_1(p)$ используем схему рис. 2 и выражение (4). Выходным сигналом в данном примере служит $f(p)$ (19), а п.ф. объекта определяет соотношение (20). Искомое входное воздействие, согласно (4), имеет вид:

$$u_1(p) = f(p) / W_1(p) = (10 \cdot p + 1) / 2 \cdot (5 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (21)$$

Структуру $u_1(p)$ выявляет разложение на простые дроби, выполненное на рис. 8. Из разложения следует, что в данном случае $u_1(t)$ образовано суммой константы и ниспадающей экспоненты. Согласно (16), начальное и конечное значения $u_1(t)$ составляют: $u_1(0) = 1$; $u_1(\infty) = 0.5$.

$$u_1(p) := \frac{.50}{(5 \cdot p + 1) \cdot p} \cdot (10 \cdot p + 1.)$$

$$u_1(p) \left| \begin{array}{l} \text{convert, parfrac, p} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow \frac{.50}{p + .20} + \frac{.50}{p}$$

Рис 8. Структура $u_1(p)$ (21)

Характер $u_1(t)$ зависит от параметров функции $f(t)$, в частности, от T_0 . На рис. 9 приведен фрагмент mcd-файла с формированием функции $u_1(t, T_0)$; рис. 10 содержит графики $u_1(t)$ при различных значениях T_0 . Среди них обращает на себя внимание вариант равенства $T_0 = T_1$, при котором $u_1(t)$ превращается в константу, легко реализуемую в практике дозирования.

$$u_1(p, T_0) := \frac{.50}{(T_0 \cdot p + 1) \cdot p} \cdot (10 \cdot p + 1.)$$

$$u_1(t, T_0) := u_1(p, T_0) \left| \begin{array}{l} \text{invlaplace, p} \\ \text{float, 2} \end{array} \right. \rightarrow (-.50) \cdot e^{(-1) \cdot \frac{t}{T_0}} + 5 \cdot \frac{e^{(-1) \cdot \frac{t}{T_0}}}{T_0} + .50$$

Рис. 9. Формирование $u_1(t, T_0)$

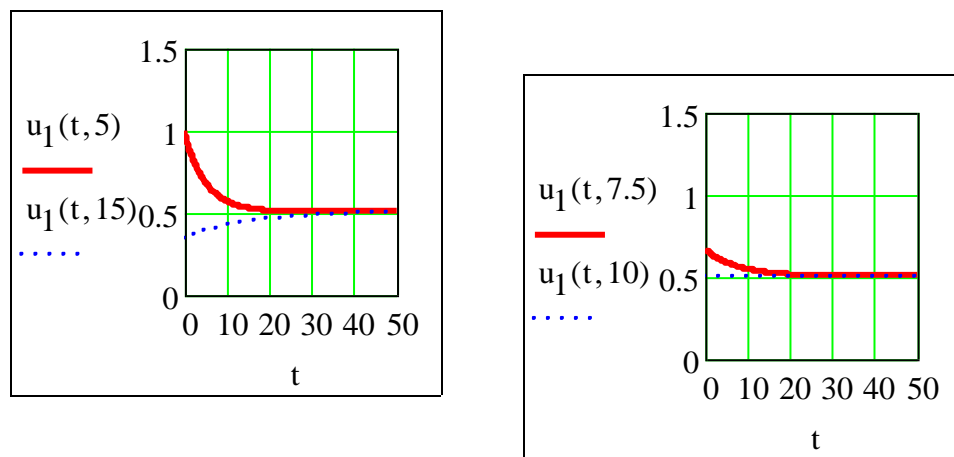


Рис. 10. Характер $u_1(t)$ при различных значениях T_0

Из графиков рис. 10 следует, что при $T_0 \neq T_1$ законы изменения входных воздействий $u_1(t)$ характеризуют монотонные кривые, реализация которых может вызвать затруднения. В таких случаях, как отмечалось выше, может использоваться ступенчатая аппроксимация кривых $u_1(t)$. С этой целью $u_1(t)$ заменяют кусочно-постоянной функцией времени. Один из примеров такого

задания представлен на рис. 11. В этом фрагменте mcd-файла аппроксимирующая функция $u_a(t)$ формируется значениями $u_1(0)$, $u_1(T_0)$, $u_1(2T_0)$ и т. д., на интервалах постоянства, равных T_0 .

$$u_a(t) := \begin{cases} u_1(0) & \text{if } t < T_0 \\ u_1(T_0) & \text{if } T_0 \leq t < 2 \cdot T_0 \\ u_1(5 \cdot T_0) & \text{if } t \geq 2 \cdot T_0 \end{cases}$$

Рис. 11. Пример формирования $u_a(t)$

Возможны и другие варианты задания $u_a(t)$. В целом, задача ступенчатой аппроксимации представляет собой одну из экстремальных задач. Большую помощь в решении подобных задач может оказать математическое моделирование.

Интегрируя дифференциальные уравнения, соответствующие п.ф. объекта $W_1(p)$ (20), с входными сигналами $u_a(t)$, получаем возможность оценить качество аппроксимации. На рис. 12 приведены результаты интегрирования.

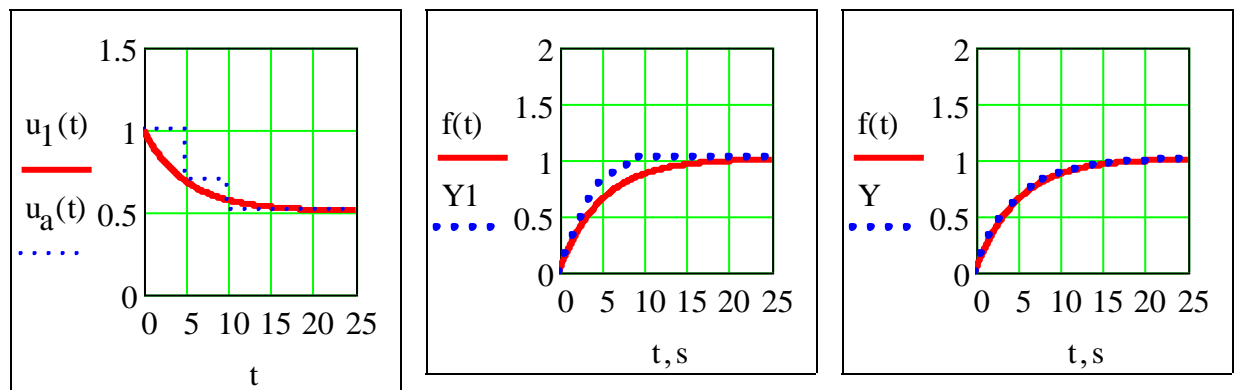


Рис. 12. Вид реакций при различных формах $u_1(t)$

На левом графике рис. 12 изображены функция $u_1(t)$ (сплошная кривая) и ее ступенчатая аппроксимация $u_a(t)$ (пунктир), сформированная на рис. 11.

На среднем и правом графиках приведены реакции на $u_a(t)$ и $u_1(t)$ соответственно (пунктир) в сопоставлении с эталонной заданной реакцией $f(t)$ (сплошная кривая). На правом графике пунктир и сплошная кривая совпадают, что свидетельствует о правильности определения $u_1(t)$. Аппроксимация $u_1(t)$ искажает реакцию относительно заданной. Но это искажение в данном случае не является критическим и принятую в этом примере функцию $u_a(t)$ можно считать приемлемой.

Определим теперь $u_2(t)$ при тех же условиях. Ранее отмечалось, что этот вариант воздействия учитывает процесс постепенного вывода препарата организмом пациента после его приема. Этот процесс, как и ранее, будем считать экспоненциальным, имеющим вид (11). Его операторная форма приведена в (12).

Для определенности будем считать, что процесс вывода препарата занимает 10 ед.вр., поэтому параметр $T_u = 2$. Отношение k_u/T_u соответствует вводимой дозе m служит начальным значением экспоненты (11). Поэтому, при $\Delta = 0.25$ и $T_u = 2$, параметр $k_u = 0.5$.

Отметим здесь, что процедура определения $h(t) = h_\Delta(t) / \Delta$, описанная в разд. Этап 2, предполагала справедливость равенства $k_u/T_u = 1$. Поэтому выражения, необходимые для определения п.ф. объекта при втором варианте воздействия, согласно (12) и (18), имеют вид:

$$u(p) = 2 / (2 \cdot p + 1), \quad h(p) = 2 / (10 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (22)$$

Учитывая, что на рис. 4 выражения $u(p)$ и $h(p)$ в (22) служат входом и выходом соответственно, на основании (4) запишем п.ф. объекта для второго варианта:

$$W_2(p) = h(p) / u(p) = (2 \cdot p + 1) / (10 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (23)$$

Сопоставляя выражения (20) и (23), отметим существенное различие п.ф. $W_1(p)$ и $W_2(p)$. Так, в $W_2(p)$ (23), в отличие от п.ф. $W_1(p)$ (20), появился множитель p в знаменателе. Это свидетельствует о появлении в $W_2(p)$ интегратора, необходимого для входных воздействий с нулевым конечным значением. Отмеченная особенность п.ф. $W_2(p)$ представлением (23) в виде суммы двух п.ф., первая из которых — п.ф. интегратора $1/p$:

$$W_2(p) = 1/p - 8 / (10 \cdot p + 1). \quad (24)$$

Принятый ранее характер входного воздействия во втором варианте предопределяет необходимость задания параметра T_0 желаемой реакции $f(t)$ (5), только исходя из равенства $T_0 = T_1$. Поскольку в данном примере $T_1 = 10$, параметры $f(t)$ (5) для второго варианта примем равными: $k_0 = 1$, $T_0 = 10$. При этом операторное выражение (6) для $f(t)$ примет вид:

$$f(p) = 1 / (10 \cdot p + 1) \cdot p. \quad (25)$$

Наличие функции $f(p)$ (25), соответствующей желаемому выходу объекта с п.ф. $W_2(p)$ (23), позволяет получить операторную форму необходимого входного воздействия, которая, согласно (4), в данном варианте имеет вид:

$$u_2(p) = f(p) / W_2(p) = 1 / (2 \cdot p + 1). \quad (26)$$

Операторной форме (26) соответствует оригинал $u_2(t)$:

$$u_2(t) = 0.5 \cdot \exp(-0.5 \cdot t). \quad (27)$$

Из (27) следует, что начальное значение $u_2(0) = 0.5$. Это полностью согласуется с выражением $u_2(0) = k_0 \cdot T_1 / k_1 \cdot T_0$ из (17), поскольку в данном случае $k_0 = 1$, $k_1 = 2$, $T_0 = T_1$. На рис. 13 приведены результирующие графики для второго варианта входного воздействия.

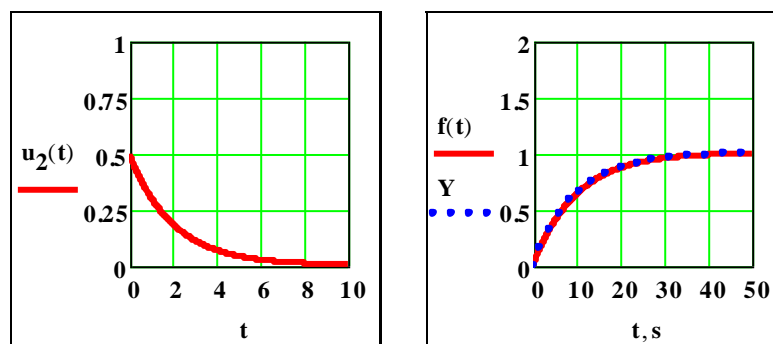


Рис. 13. Результаты примера для второго варианта

На левом графике (см. рис. 13) приведена кривая входного воздействия (47), отражающего процесс постепенного выведения организмом пациента препарата, введенного в момент времени $t=0$. Расчетная доза этого препарата для принятых в примере условий составляет $u_2(0) = 0.5$.

Интегрирование ДУ, соответствующих п.ф. $W_2(p)$, имитирует процесс влияния входного воздействия $u_2(t)$ на пациента. Результат такого интегрирования приведен на правом графике рис. 13 (пунктир); этот график совпадает с желаемой реакцией $f(t)$ (сплошная кривая).

Проведенный анализ и полученные результаты свидетельствуют о возможности применения предлагаемого подхода к решению проблемы расчета дозировок методами моделирования и теории динамических систем. Существует также принципиальная возможность решения указанной проблемы в многомерном варианте [4], когда совместно применяется несколько разнородных препаратов и синхронно контролируются реакции нескольких параметров пациента.

Дополнительно к настоящему материалу на портале [5] (рубрика Теория регулирования/Меди) размещены интерактивные ресурсы на основе mcd-файлов рассмотренного выше примера.

Литература

1. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. М.: Наука. 1971, 288 с.
2. Деруссо П., Рой Р., Клоуз Ч. Пространство состояний в теории управления. М: Наука. 1970, 620 с.
3. Юревич Е.И. Теория автоматического управления. БХВ-Петербург. 2007, 155 с.
4. Ивановский Р.И., Таранов А.Г. Синтез многомерных систем автоматического управления с применением ЭЦВМ. М.: Наука. 1970, 172 с
5. <http://mas.exponenta.ru>.