Уравнения Колмогорова. Краткие сведения

Ивановский Р.И., Хрусталева М.М.(студ. 4 курс СПбГПУ)

Дифференциальные уравнения Колмогорова (УрК) служат для описания изменчивости вероятностей состояний многоэлементной системы с отказами и восстановлениями.

При этом предполагают, что система функционирует в непрерывном времени, а ее элементы меняют свое состояние под воздействием дискретных токов отказов и восстановлений с интенсивностями λ_k и μ_k соответственно; здесь $k = 1, \ldots, m$, где m – число элементов системы. При простейшем потоке этих событий, т. е. при ординарности потока и отсутствии последействия, возникает марковский процесс переходов системы из состояния в состояние. УрК описывают подобные процессы.

Переменными в УрК служат вероятности состояний исследуемой системы $P_i(t),\ i = 1, .., n.$ Получение этих вероятностей в результате решения УрК позволяет оценить практически важные показатели надежности, например, вероятность безотказной работы системы.

Существуют определенные правила формирования УрК.

Предварительно многоэлементную систему удобно представить в виде графа состояний. Для этого указывают его вершины (состояния с их вероятностями P_i) и дуги (ребра) с пометками λ_k или μ_k, учитывающими переходы из состояния в состояние под воздействием потоков отказов или восстановлений элементов системы.

Каждое i-ое уравнение в составе УрК записывается так:

- в левой части записывается производная вероятности i-го состояния системы;
- правая часть каждого i-ого уравнения УрК содержит столько слагаемых, сколько ребер связано с данным (i-ым) состоянием;
- каждое слагаемое правой части образуется произведением интенсивности соответствующего потока событий (λ или μ) на вероятности тех состояний, с которыми связаны ребра;
- перед каждым слагаемым правой части ставится минус, если ребро исходит из i-го состояния; если же ребро входит в i-ое состояние, перед соответствующим слагаемым ставится плюс.

Сформированная подобным образом система УрК в векторно-матричной форме имеет вид:

$$\dot{\mathbf{P}} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{P};\ \mathbf{P}(0) = \mathbf{P_0}, \qquad (1)$$

где $\mathbf{A}$ – $(n \times n)$-матрица коэффициентов; $\mathbf{P}$ – $(n \times 1)$-вектор вероятностей P_i состояний исследуемой системы; $\mathbf{P_0}$ – вектор начальных условий.

Особенностью УрК (1) является вырожденность матрицы $\mathbf{A}$, поэтому попытка интегрировать систему уравнений (1) без предварительного преобразования обречена на неудачу. Вырожденность $\mathbf{A}$ определяется наличием линейной связи элементов вектора $\mathbf{P}$ в виде очевидного равенства:

$$P_1 + P_2 + \ldots + P_i + \ldots + P_{n-1} + P_n = 1. \qquad (2)$$

Из (2) следует, что сумма всех уравнений в системе (1) даст ноль, что возможно лишь при условии (вектор **P** в общем случае ненулевой):

сумма строк матрицы **A** есть нулевая строка.

Это утверждение свидетельствует о наличии линейной зависимости строк матрицы **A** и объясняет причину ее вырожденности. При желании данное утверждение можно использовать в качестве критерия корректности формирования матрицы **A**.

Легко убедиться в том, что собственные числа (с.ч.) матрицы **A** – вещественные, причем (n – 1) этих с.ч. – отрицательные, а одно с.ч. – нулевое. Отсюда следует, что проблема определения вектора **P** может быть решена снижением числа уравнений (1) на единицу, используя (2).

Из (2) можно выразить любую переменную через остальные. Выполним это преобразование исключением из (1) последнего элемента вектора **P**:

$$P_n = 1 - (P_1 + P_2 + \ldots + P_i + \ldots + P_{n-1}) = 1 - \mathbf{c} \cdot \mathbf{p}\,, \qquad (3)$$

где **p** – [(n – 1) × 1]-вектор, составленный из первых (n - 1) членов вектора **P**; **c** – [1 × (n – 1)]-строка, состоящая из единиц:

$$\mathbf{p} = |\, P_1 \;\; P_2 \;\; \ldots \; P_i \; \ldots \; P_{n-1}|^T; \qquad \mathbf{c} = |111\ldots11|. \qquad (4)$$

После преобразований получим (n – 1) первых системы (1) в виде:

$$\dot{\mathbf{p}} = \mathbf{M} \cdot \mathbf{p} + \mathbf{b}; \;\; \mathbf{M} = \mathbf{R} - \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}; \qquad (5)$$

где R – [(n – 1) × (n – 1)]-верхний диагональный блок матрицы **A**;
b – [(n – 1) × 1]-вектор, составленный из первых (n - 1) членов n-го (последнего) столбца матрицы **A**.

Матрица М – невырожденное ядро матрицы **A**, поэтому показателем корректности преобразований служит совпадение с.ч. матрицы **M** и ненулевых с.ч. матрицы **A**.

Уравнения (5) теперь могут быть использованы при решении прикладных задач анализа характеристик надежности как в динамике, так и в статике (при $t \to \infty$). В любом случае из уравнений (5) определяются (n - 1) первых элементов вектора **P**; последний, ранее исключенный из УрК, элемент P_n находится из выражения (3).

Анализ динамики изменения вероятностей состояний осуществляется интегрированием уравнений (5). Установившееся значение этих вероятностей находится из следующего соотношения:

$$\mathbf{p}(\infty) = -\mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{b}. \qquad (6)$$

При решении прикладных задач анализа многоэлементных систем с отказами и восстановлениями с использованием УрК могут быть решены так называемые прямые и обратные задачи.

Прямая задача предполагает анализ вероятностей состояний и характеристик надежностей при задании конкретных значений интенсивностей. Решение обратной задачи предполагает нахождение интенсивности отказов и/или восстановлений с использованием одного из возможных критериев, наприер, максимизацией вероятности безотказной работы.